SCHRIFTEN ZUR
WISSENSCHAFTLICHEN WELTAUFFASSUNG
HERAUSGEGEBEN VON
PHILIPP FRANK UND MORITZ SCHLICK
O. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT PRAG
O. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WIEN

BAND 2

ABRISS DER LOGISTIK

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER RELATIONSTHEORIE UND IHRER ANWENDUNGEN

VON

DR. RUDOLF CARNAP
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT WIEN

MIT 10 TEXTABBILDUNGEN

SPRINGER-VERLAG WIEN GMBH 1929

URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI JULIUS SPRINGER IN VIENNA 1929

ISBN 978-3-7091-3120-6 ISBN 978-3-7091-3127-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-7091-3127-5

Vorwort

Der vorliegende Abriß will nicht so sehr eine Theorie darstellen, als eine Praxis lehren. Wenn jemand auf irgend einem Gebiet der Philosophie oder der Einzelwissenschaften sich um eine exakte Analyse der Aussagen und Begriffe bemüht, so sollen ihm hier die logistischen und insbesondere die relationstheoretischen Hilfsmittel als ein scharfes Werkzeug in die Hand gegeben werden. Diese Hilfsmittel sind bisher, besonders in Deutschland, noch sehr wenig bekannt; nur in logisch-mathematischen Untersuchungen werden sie zuweilen angewendet. Das Ergebnis einer logistischen Bearbeitung eines Gebietes ist zunächst eine Analyse der vorkommenden Begriffe und Aussagen und dann eine Synthese in zwei Formen: die Begriffe des Gebietes werden aus geeignet zu wählenden Grundbegriffen schrittweise definiert und dadurch in einen Stammbaum der Begriffe („Konstitutionssystem") geordnet; die Aussagen des Gebietes werden aus geeignet zu wählenden Grundaussagen („Axiomen") schrittweise deduziert und dadurch in einen Stammbaum der Aussagen („Deduktionssystem") geordnet.

Der erste, systematische Teil des Abrisses stellt die (wichtigsten) Zeichen und Methoden der Logistik dar; der zweite Teil bringt Anwendungsbeispiele. Da hier vor allem die Anwendung der logistischen Methode gelehrt werden soll, so können die rein logischen Probleme, besonders die gegenwärtig noch ungelösten, nur kurz behandelt werden; es sind aber an den betreffenden Stellen geeignete Literaturhinweise zu weiterem Studium gegeben (vgl. die Hinweise 47, S. 107).

Der Ausbau der modernen Logik und Relationstheorie ist vor allem das Verdienst von B. Russell und A. N. Whitehead, auf deren Werk „Principia Mathematica" die vorliegende Darstellung beruht. Ihnen gebührt daher der Dank aller, die sich

der logistischen Hilfsmittel bedienen. Herrn Russell bin ich außerdem noch zu besonderem Dank verpflichtet, weil er persönlich meine ersten Studien auf diesem Gebiet in außerordentlich hilfsbereiter und aufopfernder Weise unterstützt hat. Ferner sage ich den Herren H. Behmann (Halle), Prof. H. Hahn (Wien) und F. Waismann (Wien) meinen besten Dank für wertvolle Ratschläge, besonders zur Terminologie.

Wien, im Januar 1929.

Rudolf Carnap

Inhaltsverzeichnis

I. Teil: System der Logistik

II. Teil: Angewandte Logistik

Seite

A. Mengenlehre und Arithmetik

B. Geometrie

C. Physik

D. Verwandtschaftslehre

E. Erkenntnisanalyse

F. Sprachanalyse

Anhang

Erster Teil

System der Logistik

1. Die Aufgabe der Logistik

Die Logistik oder symbolische Logik ist ein in den letzten Jahrzehnten entwickeltes System der Logik, das sich vor allem durch folgende Züge von der alten Logik (der klassischen, aristotelisch-scholastischen) unterscheidet; (1) betrifft das äußere Gewand der neuen Logik, (2) und (3) ihre Überlegenheit gegenüber der alten Logik, (4) und (5) die positiven Früchte der neuen Methode.

1. Die Logistik drückt ihre Begriffe und Aussagen nicht durch Worte aus, sondern durch Zeichen und Formeln, die anfangs im Anschluß an die mathematischen Zeichen entwickelt wurden („Algebra der Logik"), dann aber eigene Form annahmen. Dieses äußerliche Merkmal ist nicht unwesentlich; die Logik gewinnt durch die Symbolik erheblich an Genauigkeit der Begriffe und an Exaktheit der Beweisführung.[1]

2. Gegenüber der inhaltlichen Dürftigkeit und praktischen Nutzlosigkeit der alten Logik, durch die sie fast alles wissenschaftliche Interesse mit Recht eingebüßt hat, finden wir in der Logistik ein System mit großem inhaltlichen Reichtum (vgl. 4) und mit vielseitiger praktischer Anwendbarkeit (vgl. 5).

3. Die so an Blutarmut dahinsiechende alte Logik bekam ihren Todesstoß, als sich zeigte, daß in ihr Widersprüche auftreten, die mit ihren Mitteln nicht zu überwinden sind. Diese Widersprüche fand man zunächst bei der Untersuchung gewisser grundlegender Begriffe der Mathematik („die Paradoxien der Mengenlehre"), sie erwiesen sich aber als allgemein-logische Widersprüche („die logischen Antinomien"), die erst die Logistik

[1] Vgl. PM (s. Literaturverzeichnis, 46, S. 106) I[1], 2f.

zu überwinden imstande war (und zwar durch die Typentheorie, s. **9 c**).

4. Wenn wir eine gewisse Auffassung über die Logik voraussetzen (es ist die, die der folgenden Darstellung zugrundeliegt), so zeigt sich, daß aus den Grundbegriffen, auf denen sich die Logik aufbaut, auch alle mathematischen Begriffe abgeleitet werden können. Die ganze Mathematik wird dann ein Zweig der Logistik.

5. Die Logistik, und besonders ihr wichtigster Teil, die Relationstheorie (oder Ordnungslehre) erweisen sich als geeignet zur Darstellung von Begriffssystemen und Theorien (insbesondere axiomatisch aufgebauten) der verschiedensten Gebiete: Geometrie, Physik, Erkenntnistheorie, Verwandtschaftslehre, Sprachanalyse u. a. (vgl. Teil II). Dadurch erhalten die Definitionen und Deduktionen in diesen Gebieten eine sonst kaum erreichbare Strenge, und zwar verbunden mit einer Konzentration der Darstellung, die das praktische Arbeiten (das Aufsuchen neuer Wege) in diesen Gebieten nicht erschwert, sondern erleichtert.

Literatur. Die folgende Darstellung der Logistik beruht im wesentlichen auf: Whitehead and Russell, Principia Mathematica (hier immer mit PM bezeichnet, vgl. Literaturverzeichnis, **46**, S. 106). Über Abweichungen von diesem System und über sonstige Literatur vgl. die Hinweise **47**, S. 107.

Von den beiden Richtungen (4) und (5), in denen die Logistik für die Wissenschaft positiv fruchtbar wird, ist die erste, die Ableitung der Mathematik, in andern Schriften schon hinreichend zur Darstellung gekommen. Außer dem Hauptwerk der Logistik, den PM, sind vor allem Russell [Einf.] (ohne Symbolik) und Behmann [Math.] (im Anschluß an die PM, aber mit eigener Symbolik) zu nennen; ferner Couturat [Pr.]. Über neuere Arbeiten vgl. die Hinweise bei Fraenkel [Grundl.] 54. — Das zweite Moment, die vielseitige Anwendbarkeit der Logistik auf außerlogischen Gebieten, ist bisher noch nicht zur Darstellung gekommen.

Den Ausdruck „Logistik", der ursprünglich Rechenkunst bedeutet, haben nach Ziehen (Lehrbuch der Logik, 173, Anm. 1) und Meinong (Stellung der Gegenstandstheorie, 115) im Jahre 1904 Couturat, Itelson und Lalande unabhängig voneinander vorgeschlagen und er setzt sich immer weiter durch. Gegenüber den Ausdrücken „algebraische" oder „symbolische Logik" hat er den Vorzug der größeren Einfachheit, besonders in der Ableitung „logistisch". Lewis ([Survey] 3 u. 340ff.) schlägt vor, die Bezeichnung „Logistik" einzuschränken auf die Methode der Anwendung der symbolisch-logischen Hilfsmittel auf außerlogischen Gebieten. (Eine philosophische

Richtung mit starker oder etwa übermäßiger Betonung des logischen Gesichtspunktes nenne man nicht „logistisch", sondern besser, wie zuweilen schon üblich, „logizistisch", „Logizismus".)

2. Funktionen

2 a. Zeichen bezeichnen entweder etwas Bestimmtes oder etwas Unbestimmtes; wir unterscheiden dementsprechend „Konstanten" und „Variable".

Wird in einem zusammengesetzten Zeichen ein (oder mehrere) Teilzeichen herausgenommen, so entstehen durch Einsetzung verschiedener Zeichen an die freigewordene Stelle verschiedene neue zusammengesetzte Zeichen. Um die freigewordene Stelle als solche kenntlich zu machen, könnten wir sie leer lassen; wir wollen aber in der Regel besondere Zeichen, die nur zu diesem Zwecke dienen, an die Leerstelle setzen, die Variabeln; diese bedeuten also selbst nichts, sondern halten nur den Platz für die Einsetzung anderer Zeichen frei. Von dem zusammengesetzten Ausdruck mit der Leerstelle sagt man, er bezeichne eine „Funktion"; die die Leerstelle kenntlich machende Variable heißt das „Argument" der Funktion; werden an die Stelle der Variabeln nacheinander verschiedene Konstanten „eingesetzt" (oder „substituiert"), so heißen diese Konstanten „Werte" des Arguments, und die Bedeutung des ganzen zusammengesetzten Zeichens nach der Einsetzung heißt „der Wert der Funktion für den betreffenden Argumentwert".

„Zulässige Argumentwerte" sind solche, bei deren Einsetzung der zusammengesetzte Ausdruck eine Bedeutung bekommt, für die also die Funktion einen Wert hat; werden andere Zeichen als die zulässigen Argumentwerte eingesetzt, so wird das ganze ein sinnloser Ausdruck. (Die genauere Abgrenzung der zulässigen Argumentwerte für eine Funktion ergibt sich durch die Typentheorie, **9**). Der Bereich der zulässigen Werte einer Variabeln heißt ihr „Wertbereich".

2 b. Unter einer „Aussage" verstehen wir in der Logik etwas, was entweder wahr oder falsch ist. („Wahr" und „falsch" sind undefinierbare Grundbegriffe.) (Mit „Aussage" ist nicht der historische Akt des Sprechens, Denkens, Vorstellens gemeint, sondern der zeitlose Inhalt.) Als Variable, deren Werte Aussagen sind, verwenden wir $p, q, r, \ldots$

1*

2 c. Jedes Zeichen, das eine bestimmte Bedeutung hat, bezeichnet entweder eine Aussage oder einen „Gegenstand". Die Funktionen sind daher, je nachdem ihre Werte Aussagen oder Gegenstände sind, einzuteilen in „Aussagefunktionen" und „Gegenstandsfunktionen". Eine Aussagefunktion ist die logistische Darstellung eines Begriffes (als etwas, das von einem Gegenstand ausgesagt werden kann). Und zwar stellen Aussagefunktionen mit éinem Argument Eigenschaften dar, Aussagefunktionen mit zwei oder mehr Argumenten zwei- bzw. mehrstellige Beziehungen. Variable Aussagefunktionen bezeichnen wir mit φ, χ, ψ (z. B. $\varphi\, x$; $\psi\, x\, y$); konstante mit $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$.

Beispiele. 1. „Das Matterhorn ist ein Berg in Europa" ist eine Aussage, also „ ist ein Berg in Europa" oder „x ist ein Berg in Europa" eine Aussagefunktion mit éinem Argument, eine Eigenschaft. Der Wertbereich für x ist hiebei der Bereich der physischen Körper: „dieser Bleistift ist ein Berg in Europa" ist eine falsche Aussage; sie ist der Funktionswert für „dieser Bleistift" als Argument; „mein Hunger ist ein Berg in Europa" ist weder wahr noch falsch, sondern sinnlos.

2. „Ich verachte den, der mich beschimpft" ist eine Aussage, also „ verachtet den, der beschimpft" eine Aussagefunktion. Soll kenntlich gemacht werden, daß die beiden Leerstellen stets übereinstimmend besetzt werden sollen, so können wir das nicht durch einfaches Freilassen, sondern nur durch Verwendung von Variabeln ausdrücken: „x verachtet den, der den x beschimpft" ist eine Aussagefunktion mit éinem Argument, eine Eigenschaft. Ist diese Beschränkung nicht gemeint, so erhalten wir eine Funktion mit zwei Argumenten: „x verachtet den, der y beschimpft"; dies ist eine Beziehung. Die ursprüngliche Aussage ist ein Funktionswert beider Funktionen.

3. „$3 + 5$" bezeichnet einen Gegenstand, also „$x + 5$" eine Gegenstandsfunktion mit éinem Argument, „$x + y$" eine Gegenstandsfunktion mit zwei Argumenten. Der Wert der ersten Funktion für den Argumentwert 2 ist „$2 + 5$", der Wert der zweiten für das (Argument-)Wertepaar 3,4 ist „$3 + 4$".

3. Wahrheitsfunktionen

3 a. Ist eine Aussage wahr bzw. falsch, so sagen wir auch, ihr „Aussagewert" sei „Wahrheit" bzw. sei „Falschheit".

Die Werte einer Aussagefunktion sind, wie gesagt, Aussagen. Die Argumentwerte einer Aussagefunktion können aber sowohl Gegenstände als Aussagen sein (aber für eine bestimmte

Argumentstelle einer bestimmten Funktion nur eines von beiden). Wenn eine Aussagefunktion der letzteren Art, also eine solche, deren Argumentwerte Aussagen sind, so beschaffen ist, daß die Wahrheit ihrer Werte nur von der Wahrheit (und nicht vom Inhalt) der einzusetzenden Aussagen abhängt (genauer: wenn der Aussagewert der Funktionswerte nur vom Aussagewert der Argumentwerte abhängt), so heißt sie eine „Wahrheitsfunktion".

Die Frage, ob alle in der Logik oder gar alle in der Wissenschaft vorkommenden Funktionen von Aussagen Wahrheitsfunktionen sind, ist noch umstritten; „Extensionalitätsthese" (**9e**). Vgl. PM I², App. C., 659ff.

Beispiel. Wir betrachten die Aussagefunktion „die beiden Aussagen *p* und *q* sind nicht beide wahr" mit den beiden Variabeln *p* und *q*. Der Aussagewert des Funktionswertes ist Falschheit, wenn wir für *p* und *q* zwei wahre Aussagen einsetzen; er ist Wahrheit, wenn wir für *p* und *q* eine wahre und eine falsche Aussage einsetzen, oder eine falsche und eine wahre Aussage, oder zwei falsche Aussagen. Der Aussagewert der Werte dieser Funktion ist also nur von den Aussagewerten der Argumentwerte abhängig, auf den Inhalt der einzusetzenden Aussagen kommt es nicht an. Es ist also eine Wahrheitsfunktion.

3b. Eine Wahrheitsfunktion $\mathsf{f}(p, q, r, \ldots)$ kann dadurch bestimmt werden, daß für jede Verteilung der Aussagewerte W (Wahrheit) und F (Falschheit) auf die Argumente der Aussagewert des Funktionswertes festgelegt wird. Das kann etwa durch folgendes Schema geschehen; jede der (willkürlichen) Verteilungen von W und F in der letzten Kolonne bestimmt eine Funktion. (Für n Argumente gibt es 2^n Zeilen des Schemas, also 2^{2^n} mögliche Werteverteilungen für die letzte Kolonne; dies ist daher die Anzahl der möglichen Wahrheitsfunktionen mit n Argumenten.)

p q $r \ldots$	$\mathsf{f}(p, q, r, \ldots)$
W W W W	F
W W W F	W
W W F W	W
W W F F	F
....	..
F F F F	..

Literatur. Die Schemata der Wahrheitsfunktionen stammen von Wittgenstein [Abh.] Satz 4·442; vgl. Weyl [Handb.] 13f., Ramsey [Found.] 342.

3 c. Wir wollen jetzt einige gebräuchliche Wahrheitsfunktionen festlegen, indem wir die Verteilung der Aussagewerte in der Funktionskolonne angeben.

Die Negation ist eine Funktion mit éinem Argument. Das Negat von p wird bezeichnet mit $\sim p$ (gelesen „non p"); es hat stets den entgegengesetzten Aussagewert von p:

p	$\sim p$
W	F
F	W

Bei Funktionen zweier Argumente nehmen wir die Ordnung der Zeilen immer so an:

$p\,q$	$\mathfrak{f}(p, q)$
W W	
W F	
F W	
F F	

Wir brauchen dann nur die jeweilige Verteilung in der Funktionskolonne anzugeben. Ist diese WFFF, so bezeichnen wir die Funktion als „logisches Produkt" oder „Konjunktion"; in Zeichen: $p \,.\, q$ (gelesen „p und q"; an Stelle des éinen Punktes tritt zuweilen ein höheres Punktzeichen: :, :., usw., vgl. **4 c**). Da hiernach $p \,.\, q$ dann und nur dann wahr ist, wenn die erste Zeile gilt, d. h. wenn p wahr ist und q wahr ist, so entspricht die Konjunktion der Und-Verbindung in der Sprache. Die „logische Summe" oder „Disjunktion" ($p \vee q$, gelesen „p oder q") ist gekennzeichnet durch WWWF. Demnach ist $p \vee q$ wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen p, q wahr ist; das entspricht dem nicht-ausschließenden „oder" („p oder q oder beide").

Die „Implikation" ($p \supset q$, „p impliziert q"; p heißt „Implikans", q „Implikat") ist gekennzeichnet durch WFWW; $p \supset q$ ist also nur dann falsch, wenn p wahr und q falsch ist,

sonst immer wahr. Wenn $p \supset q$ wahr ist und p wahr ist, so gilt die erste Zeile, also ist dann auch q wahr. Deshalb liest man häufig $p \supset q$ „wenn p, so q“; dabei muß man aber beachten, daß der Sinn von $p \supset q$ nicht genau dem Wenn-Satz der gewöhnlichen Sprache entspricht; auch der Ausdruck „aus p folgt q“ gibt den Sinn nicht richtig wieder. Denn p und q brauchen ja keinerlei inhaltlichen Zusammenhang zu haben, damit $p \supset q$ gilt; aus dem Schema ist ersichtlich, daß $p \supset q$ immer wahr ist, wenn p falsch ist, und ebenso auch immer, wenn q wahr ist. (Man sagt deshalb: „ein falscher Satz impliziert alles“ und „ein wahrer Satz wird von jedem impliziert“).

Beispiele. Es gelten demnach die Implikationen: 1. „$(2+2=5) \supset$ (Buxtehude liegt an der Ostsee)“ ganz gleich, ob die zweite Aussage wahr oder falsch ist; 2. „(π^{π} ist transzendent) $\supset$ (Berlin ist eine Stadt)“ ganz gleich, ob die erste Aussage wahr oder falsch ist.

Die „Äquivalenz“ ($p \equiv q$, „p äquivalent q“) ist gekennzeichnet durch WFFW; $p \equiv q$ ist also dann wahr, wenn entweder beide Aussagen wahr oder beide falsch sind, kurz: wenn beide denselben Aussagewert haben.

Die „Unverträglichkeit“ ($p \mid q$, „p Strich q“) ist gekennzeichnet durch FWWW; $p \mid q$ ist also nur dann falsch, wenn beide Aussagen wahr sind; $p \mid q$ besagt also: mindestens eine der beiden Aussagen ist falsch.

3 d. Nehmen wir die Unverträglichkeit als undefinierten Grundbegriff, so können wir die anderen genannten Wahrheitsfunktionen sämtlich daraus ableiten, explizit definieren. Eine explizite Definition besteht darin, daß ein neues Zeichen („Definiendum“) für gleichbedeutend erklärt wird mit einem aus alten Zeichen zusammengesetzten Ausdruck („Definiens“); dabei wird zwischen die beiden Zeichen das Definitionszeichen $=_{\mathrm{Df}}$ gesetzt. ($=_{\mathrm{Df}}$ ist kein Grundbegriff des Systems; Definitionen dienen nur zur Abkürzung, sind prinzipiell nicht notwendig.) (Die Punkte ersetzen Klammern, s. **4 c**.)

D 3·1. $\sim p \,.=_{\mathrm{Df}}.\, p \mid p$

D 3·2. $p \vee q \,.=_{\mathrm{Df}}.\, (p \mid p) \mid (q \mid q)$

D 3·3. $p \,.\, q \,.=_{\mathrm{Df}}.\, (p \mid q) \mid (p \mid q)$

D 3·41. $p \supset q \,.=_{\mathrm{Df}}.\, p \mid (q \mid q)$

oder

D 3·42. $p \supset q \,.=_{\mathrm{Df}}.\, \sim p \,.\vee.\, q$

Es empfiehlt sich häufig, hiernach eine Implikation $p \supset q$ durch $\sim p \vee q$ zu ersetzen (besonders, um nicht der falschen Deutung „aus p folgt q“ zu erliegen).

D 3·5. $p \equiv q \,.=_{\mathrm{Df}}.\, p \supset q \,.\, q \supset p$

4. Die Grundsätze

4 a. Aus den angegebenen Schemata für $\sim$, $\vee$, $.$, $\supset$, $\equiv$ läßt sich leicht das Schema für jede aus diesen Funktionen zusammengesetzte Funktion ableiten, indem man die Funktionskolonne für Teilausdrücke bildet und dann schrittweise weitergeht bis zur ganzen Funktion. Z. B. für $\sim p \vee q$:

p q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
W W	F	W
W F	F	F
F W	W	W
F F	W	W

Da diese Kolonne mit der für $p \supset q$ früher angegebenen übereinstimmt, so können wir die Definition D 3·42 aufstellen.

4 b. Für $q \,.\supset.\, p \vee q$ erhalten wir:

p q	$p \vee q$	$q \,.\supset.\, p \vee q$
W W	W	W
W F	W	W
F W	W	W
F F	F	W

Diese Funktion hat also die Eigentümlichkeit, daß sie stets wahr ist, ganz gleich, welche Aussagewerte den Argumenten zukommen. Eine solche Funktion heißt eine „Tautologie“. Sind in einer Tautologie p und q bestimmte Aussagen, so ist die Geltung der Tautologie unabhängig davon, ob p oder q wahr sind. Die Tautologie teilt daher über das Bestehen oder Nichtbestehen der

durch p und q bezeichneten Sachverhalte nichts mit; sie ist inhaltsleer (aber nicht sinnlos).

Um auszudrücken, daß eine Aussagefunktion $\mathbf{f}\,x$ oder $\mathbf{f}\,x\,y$ mit dem Argument x bzw. den Argumenten x, y für jeden Wert der Argumente den Aussagewert Wahrheit hat, schreiben wir vor die Aussagefunktion (die dann „Operand" genannt wird) den „Operator" (und zwar hier „Alloperator"): (x) bzw. (x, y). Damit erhalten wir aus der Aussagefunktion durch „Generalisation" die „Allaussage" $(x) \,.\, \mathbf{f}\,x$ bzw. $(x, y) \,.\, \mathbf{f}\,x\,y$.

Soll eine Aussage (die zunächst neutral gemeint ist, weder behauptet noch bestritten wird) als wahr hingestellt werden, so setzen wir vor ihren Ausdruck das Behauptungszeichen $\vdash$, z. B. $\vdash . 1 + 1 = 2$. (Dieses Zeichen ist kein Grundzeichen der Logik, sondern dient nur dem praktischen Zweck der Mitteilung.)

Da wir gefunden haben, daß die Funktion $q \,.\supset.\, p \vee q$ eine Tautologie ist, d. h. für alle Argumentwerte den Aussagewert Wahrheit hat, so können wir folgende Behauptung aufstellen, die den ersten formalen Grundsatz bildet: $\vdash : (p, q) : q \,.\supset.\, p \vee q$. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir fest: hinter einem Behauptungszeichen darf der Alloperator weggelassen werden. (Da nur eine Aussage, nicht eine Funktion, behauptet werden kann, so entsteht hierdurch keine Zweideutigkeit.) Wir schreiben also als ersten formalen Grundsatz:

G 4·1. $\vdash : q \,.\supset.\, p \vee q$

4c. Die Punktregeln.

Die Punktzeichen (. : :. :: usw.) ersetzen das Einklammern von Aussagen. Die Punktzeichen gehören drei verschiedenen Stufen an, je nachdem sie stehen

1. zwischen zwei Aussagen einer Konjunktion (**3c**),
2. nach einem Operator (x), $(\exists\, x)$, $[(\iota\, x)\, (\varphi\, x)]$ (**4b**, **6a**, **7b**).
3. nach $\vdash$, vor und nach den Zeichen: $\supset$, $\equiv$, $\vee$, $|$, $=_{\mathrm{Df}}$ (**4b**, **3c**, **3d**).

Punktregel zum Lesen: Der Bereich eines Punktzeichens (bei 1 nach links und rechts, bei 2 nach rechts, bei 3 nach links bzw. rechts) erstreckt sich entweder bis zum Ende des Satzes oder bis zu einem Punktzeichen mit mehr Punkten oder bis zu einem Zeichen derselben oder einer höheren Stufe mit gleichviel Punkten.

Punktregel zum Schreiben: Soll ein Punktzeichen über ein anderes hinausreichen, so muß es, wenn es von höherer Stufe ist als das andere, mindestens gleichviel Punkte haben, sonst mehr Punkte.

Beispiele:

$p \vee . q . r$	bedeutet	$p \vee (q . r)$
$\vdash : (p, q) : p \vee q . \supset . q \vee p$	,,	$\vdash \{(p, q) . [(p \vee q) \supset (q \vee p)]\}$
$p : \vee : q . \supset . q \vee p$	,,	$p \vee [q \supset (q \vee p)]$
$(x) . \varphi x . \supset . p \vee q$	,,	$[(x) . \varphi x] \supset (p \vee q)$
$(x) : \varphi x . \supset . p \vee q$	,,	$(x) . [\varphi x \supset (p \vee q)]$
$(x) : \varphi x \supset p . \vee q$	,,	$(x) . [(\varphi x \supset p) \vee q]$
$(x) : \varphi x \supset p : \vee q$	,,	$[(x) . (\varphi x \supset p)] \vee q$

4 d. In gleicher Weise wie G 4·1 kann man die folgenden Tautologien durch das Schema nachprüfen und als logische Grundsätze aufstellen. (Wir nennen sie nicht „Axiome", weil sie wahre Sätze sind, während die Axiome eines Axiomensystems (z. B. der Geometrie) Ansetzungen über unbestimmte Gegenstände sind, also Aussagefunktionen; s. **30**). Der wesentliche Charakter der logischen Sätze, im Unterschied zu den empirischen, liegt nicht darin, daß sie Allaussagen sind, sondern darin, daß sie Tautologien sind: auf Grund ihrer bloßen Form sind sie notwendig wahr, aber auch inhaltsleer.

G 4·2. $\vdash : p \vee p . \supset . p$

G 4·3. $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ (Die Disjunktion ist kommutativ.)

G 4·4. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$

Diese vier formalen Grundsätze (Tautologien) bilden die Grundlage der Theorie der Deduktion. Sie können auch aus einem einzigen Grundsatz abgeleitet werden:

$\vdash :: p \,|\, . q \,|\, r : \,|\, :. t \,|\, . t \,|\, t : \,|\, : s \,|\, q . \,|\, . \sim (p \,|\, s)$

Literatur. Zur Herleitung aus éinem Grundsatz: Nicod, Proc. Cambr. Phil. Soc. XIX, 1917; vgl. Russell [Einf.] 154.

4 e. Zu den formalen Grundsätzen kommen noch zwei materiale Grundsätze, die nicht symbolisch ausdrückbar sind, sondern inhaltlich verstanden werden müssen, weil sie Anleitung zum Handeln geben, nämlich zum Neuaufstellen von Behauptungen auf Grund schon vorliegender Behauptungen. Diese Schlußregeln lauten:

G 4·5. Schlußregel der Implikation. Haben wir zwei Behauptungen, von denen die eine eine Implikation und die andere deren Implikans ist, so dürfen wir ihr Implikat als Behauptung aufstellen.

D. h.: aus zwei Behauptungen von der Form $\vdash . p \supset q$ („Obersatz“) und $\vdash . p$ („Untersatz“) erschließen wir die dritte: $\vdash . q$ („Schlußsatz“). Die Berechtigung dieses Schlusses folgt aus dem früher (**3 c**) über den Sinn der Implikation Gesagten. (Dieser Schluß ist der „modus ponens“ der klassischen Logik.) Die Tautologie $\vdash :. p \supset q . p : \supset . q$ entspricht dieser Schlußregel, kann sie aber nicht ersetzen. Denn nur die in Worten ausgedrückte Schlußregel, nicht aber diese Tautologie, setzt uns in den Stand, die Aussage q herauszunehmen und für sich zu behaupten: $\vdash q$.

G 4·61. Schlußregel der Substitution. Haben wir eine behauptete Allaussage, so dürfen wir eine Umformung von ihr behaupten, die dadurch entsteht, daß entweder

a) an Stelle einer der Variabeln (an jeder Stelle, an der sie im Operanden vorkommt) der Ausdruck einer bestimmten Funktion eingesetzt wird, deren Werte zum Wertbereich der Variabeln gehören, und an Stelle dieser Variabeln im Alloperator das Argument bzw. die Argumente dieser Funktion gesetzt werden,

G 4·62. oder b) an Stelle einer der Variabeln (an jeder Stelle an der sie im Operanden vorkommt), das Zeichen einer Konstanten, die zum Wertbereich der Variabeln gehört, eingesetzt und die Variable im Alloperator gestrichen wird.

Bei der Anwendung ist zu beachten, daß gemäß der Festsetzung von **4 b** der Alloperator hinter dem Behauptungszeichen meist nicht hingeschrieben wird.

Beispiele. Aus $\vdash . (x, y, z) . x^z \cdot y^z = (x\,y)^z$ schließen wir nach G 4·61: $\vdash . (x, y, u, v) . x^{u+v} \cdot y^{u+v} = (xy)^{u+v}$. (In beiden Fällen könnte der Alloperator auch weggelassen werden.) Aus derselben Allaussage schließen wir nach G 4·62: $\vdash . (x, y) . x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$; oder auch (nach Streichung aller Variabeln des Operators fällt der ganze Operator fort): $\vdash . 6^2 \cdot 7^2 = (6{\cdot}7)^2$.

5. Lehrsätze der Aussagentheorie

5 a. Einige Lehrsätze, die aus den genannten Grundsätzen abgeleitet oder durch das Schema als Tautologien bestätigt werden können:

L 5·11. $\vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$ Hiernach bleibt eine Implikation gültig, wenn beide Teile negiert und vertauscht werden („Wendung").

L 5·12. $\vdash : p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r$ Die Implikation ist transitiv.

L 5·13. $\vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$ Hierauf beruht der indirekte Beweis; impliziert eine Voraussetzung ihr eigenes Gegenteil, so ist sie falsch.

Drei Grundsätze der alten Logik, die hier als abgeleitete Lehrsätze auftreten:

L 5·14. $\vdash . p \vee \sim p$ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten.)

L 5·15. $\vdash . \sim (p . \sim p)$ (Satz vom Widerspruch.)

L 5·16. $\vdash . \sim (\sim p) \equiv p$ (Satz von der doppelten Negation.)

5 b. Der Beweis dieser und weiterer Lehrsätze der Logik, und zwar hier der Aussagentheorie, geschieht durch Anwendung der Schlußregeln G 4·5, 61, 62 auf die vier formalen Grundsätze G 4·1, 2, 3, 4. Da diese Grundsätze alle die Form von Implikationen haben, so können sie bei Anwendung der Schlußregel G 4·5 in zwei verschiedenen Weisen benutzt werden: entweder als Obersatz oder als Untersatz. Bei Anwendung der Schlußregel G 4·61, 62 in einem Beweise schreiben wir die vorzunehmende Substitution in Bruchform (Variable unten) hinter die Bezeichnung des Satzes, in dem substituiert wird.

Beispiel: Beweis von L 5·13.

D 3·42. $p \supset q . =_{Df} . \sim p \vee q$ (1)

$\left[\text{G } 4{\cdot}2 \frac{\sim p}{p} \right] \vdash : \sim p \vee \sim p . \supset . \sim p$

(1) $\vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$ (L 5·13)

Jeder Lehrsatz der Aussagentheorie (d. h. jede rein logische Allaussage mit nur Aussagevariabeln) kann auch in anderer Weise bewahrheitet werden als durch Beweis aus den Grundsätzen; man kann ihn durch das Schema als Tautologie erweisen, wie oben für G 4·1 gezeigt wurde (**4 b**).

5 c. Äquivalenzen zum Auflösen eines negierten Klammerausdrucks:

L 5·21. $\vdash : \sim (p . q) . \equiv . \sim p \vee \sim q.$

„Es ist nicht wahr, daß p und q beide gelten" hat dieselbe Bedeutung wie „p ist falsch oder q ist falsch".

L 5·22. $\vdash : \sim (p \vee q) . \equiv . \sim p . \sim q$

„Es ist nicht wahr, daß p oder q gilt" ist gleichbedeutend mit „beide Aussagen sind falsch". Die Lehrsätze L 5·21, 22 heißen zusammen „Regel von De Morgan".

L 5·23. $\vdash : \sim(p \supset q) . \equiv . p . \sim q$

Besteht nicht die Implikation zwischen p und q, so ist p wahr und q falsch (denn in jedem anderen Falle bestände die Implikation, vgl. **3 e**).

6. Allaussagen und Existenzaussagen

6 a. Haben wir eine bestimmte Aussagefunktion $\mathbf{f}\, x$, so können wir von ihr aus auf zwei verschiedenen Wegen zu einer Aussage gelangen: entweder durch Einsetzung einer Konstanten nach G 4·62 (z. B. $\mathbf{f\, a}$) oder durch Generalisation. Hierbei sind zwei Arten zu unterscheiden: die Generalisation durch einen Alloperator zu einer Allaussage ($(x) . \mathbf{f}\, x$) haben wir schon kennen gelernt (**4 b**); die Generalisation durch einen „Existenzoperator" zu einer „Existenzaussage" von der Form $(\exists\, x) . \mathbf{f}\, x$ kann mit Hilfe der ersteren definiert werden:

D 6·01. $(\exists\, x) . \varphi\, x . =_{Df} . \sim [(x) . \sim \varphi\, x]$

Entsprechend bei mehreren Argumenten: $(\exists\, x, y) . \varphi\, x\, y$ usf.

$(\exists\, x) . \varphi\, x$ bedeutet demnach: nicht für alle x ist $\varphi\, x$ falsch; also: $\varphi\, x$ ist manchmal wahr, oder: es gibt (mindestens) ein x, für das $\varphi\, x$ gilt.

6 b. Aus G 4-62 folgt, daß, wenn $(x) . \mathbf{f}\, x$ gilt und $\mathbf{a}$ ein bestimmter, zulässiger Argumentwert für $\mathbf{f}\, x$ ist, $\mathbf{f\, a}$ gilt. Das ist auch der Fall, wenn für $\mathbf{f}$ und $\mathbf{a}$ eine beliebige andere Funktion bzw. ein beliebiger Argumentwert genommen wird:

L 6·1. $\vdash : (x) . \varphi\, x . \supset . \varphi\, u$

(„Was von jedem gilt, gilt von irgend einem.")

Haben wir einen bestimmten Gegenstand $\mathbf{a}$ derart, daß $\mathbf{f\, a}$ wahr ist, so folgt daraus, daß es etwas gibt, für das die Funktion $\mathbf{f}\, x$ gilt, also: $(\exists\, x) . \mathbf{f}\, x$. Dies kann allgemein in folgender Weise bewiesen werden. Aus L 6·1 folgt: $\vdash : (x) . \sim \varphi\, x . \supset . \sim \varphi\, u$. Hieraus durch Wendung (nach L 5·11): $\vdash : \varphi\, u . \supset . \sim [(x) . \sim \varphi\, x]$, und nach D 6·01:

L 6·2. $\vdash : \varphi\, u . \supset . (\exists\, x) . \varphi\, x$

Dies ist der Hauptsatz zur Aufstellung von Existenzaussagen. Für eine bestimmte Funktion **f** und einen bestimmten Gegenstand **a** folgt hieraus nach der Substitutionsregel (G 4·62): $\vdash : \mathbf{fa} . \supset . (\exists\, x) . \mathbf{f}\, x$.

6 c. $(x) . \varphi\, x \supset \psi\, x$ heißt eine „generelle Implikation“ zum Unterschied von der „Einzelimplikation“ zwischen zwei bestimmten Aussagen. Entsprechend: „generelle Äquivalenz“, „Einzeläquivalenz“. Die generellen Implikationen können sprachlich durch Bedingungssätze wiedergegeben werden („wenn φ gilt, so gilt ψ“); sie haben in allen Wissenschaftsgebieten eine große Bedeutung („Gesetze“).

Anstatt $(x) . \varphi\, x \supset \psi\, x$ wird zuweilen auch geschrieben: $\varphi\, x \supset_x \psi\, x$; und entsprechend mit $\supset_{x,\,y}$, $\equiv_x$ usw.

6 d. Ist der Wertbereich der Variabeln x der Funktion $\mathbf{f}\, x$ endlich, so können $(x) . \mathbf{f}\, x$ und $(\exists\, x) . \mathbf{f}\, x$ als Konjunktion bzw. als Disjunktion geschrieben werden. Hat etwa x nur die Werte **a**, **b**, **c**, so gilt:

$$(x) . \mathbf{f}\, x . \equiv . \mathbf{fa} . \mathbf{fb} . \mathbf{fc}$$

$$(\exists\, x) . \mathbf{f}\, x . \equiv . \mathbf{fa} \vee \mathbf{fb} \vee \mathbf{fc}$$

Ob diese Auffassung der All- und der Existenzaussagen auch bei unendlichem Wertbereich der Variabeln zulässig ist, ist strittig.

Literatur. Gegen die Zulässigkeit: Hilbert, Über das Unendliche, Math. Ann. 95, 1926; Weyl [Handb.] 13; dafür: Ramsey [Found.].

6 e. Da $(x) . \mathbf{f}\, x$ und $(\exists\, x) . \mathbf{f}\, x$ nicht Funktionen, sondern Aussagen bezeichnen und daher für die Variable nichts mehr eingesetzt werden kann, so heißt hier x eine „scheinbare“ oder „gebundene Variable“, zum Unterschied von der „wirklichen“ oder „freien Variabeln“ im Ausdruck einer Funktion. Später lernen wir noch andere Formen gebundener Variabeln kennen (z. B. $\hat{x}(\mathbf{f}\, x)$, **8 a**; ferner **11 a**, **7 b**). Im Ausdruck einer Aussage können keine freien, sondern nur gebundene Variable vorkommen.

In der Mathematik kommen gebundene Variable z. B. beim bestimmten Integral vor; in $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}\, x\, \mathbf{d}\, x$ ist x gebunden, der ganze Ausdruck ist eine Konstante, es kann nicht für x hier etwas eingesetzt werden.

7. Kennzeichnungen

7 a. $=$ benutzen wir als Zeichen der Identität (im strengen Sinne; **a** $=$ **b** heißt: **a** und **b** sind Namen desselben Gegenstandes). Wir definieren:

D 7·01. $x = y \,.\, =_{\mathrm{Df}} .\, (\varphi) \,.\, \varphi x \supset \varphi y$

Die Definition besagt: $x = y$ soll dann und nur dann gelten, wenn jede Funktion für x und y denselben Aussagewert hat, d. h. wenn x und y überall für einander eingesetzt werden können. In anderer Ausdrucksweise: wenn x und y in allen Eigenschaften übereinstimmen. Die Verschiedenheit (Nichtidentität) wird mit $\neq$ bezeichnet.

Literatur. Die Definition beruht auf der Leibnizschen Auffassung von der „identitas indiscernibilium", der Identität des Nichtunterscheidbaren. Die obenstehende Definition wird vertreten von Russell PM I 146f., und von Hilbert [Logik] 83; eine verwandte, aber abweichende Formulierung gibt Ramsey [Found.]. Wird die genannte Auffassung nicht anerkannt, so kann die Identität als undefinierter Grundbegriff aufgestellt werden; so z. B. Behmann [Math.] 19. Abgelehnt wird die Identität als logischer Begriff von Wittgenstein [Abh.] 6.2322; bei dieser Auffassung können die Kardinalzahlen (**21**) und die weiteren mathematischen Begriffe nicht aus den logischen abgeleitet werden.

7 b. Ist φx eine Aussagefunktion, die nur für éinen Wert des Argumentes eine wahre Aussage ergibt, so bezeichnen wir diesen Wert mit $(\imath x)(\varphi x)$ „dasjenige x, für das φx gilt". Da der Ausdruck $(\imath x)(\varphi x)$ den bestimmten Gegenstand nicht mit Namen nennt, ihn aber doch eindeutig umschreibt oder kennzeichnet, so nennen wir ihn eine „Kennzeichnung" (PM: „description", zur Terminologie s. Sachregister **49**, S. 109).

„$(\imath x)(\varphi x)$" kann nicht selbst explizit definiert werden. Wir können nur eine „Gebrauchsdefinition" dafür angeben, d. h. eine Festsetzung darüber, welche Bedeutung die Sätze haben sollen, in denen dieses Zeichen vorkommt. Kommt es nämlich als Argumentwert etwa für die Aussagefunktion ψz vor, so soll das bedeuten: es gibt mindestens ein und auch nur ein u, das φ befriedigt, und dieses befriedigt auch ψ; $\psi(\imath x)(\varphi x)$ soll also bedeuten:

$$(\exists u) : \varphi x \,.\, \equiv_x .\, x = u : \psi u .$$

7 c. D 7·02. $E!\,(\imath\,x)\,(\varphi\,x)\,.=_{Df}:(\exists\,u):\varphi\,x\,.\equiv_x.\,x=u$

$E!\,(\imath\,x)\,(\varphi\,x)$ bedeutet hiernach: es gibt genau éin x, das $\varphi\,x$ befriedigt; wir können diesen Ausdruck daher so lesen: „dasjenige x, das φ befriedigt, existiert." Diese Aussage ist dann und nur dann wahr, wenn φ von genau éinem Argumentwert befriedigt wird. Das Definiendum stellt die Existenz nicht als Aussagefunktion dar; Existenz ist nicht eine Eigenschaft eines Gegenstandes (kein „Prädikat"). Das ist zuweilen in philosophischen Argumentationen nicht beachtet worden, z. B. im ontologischen Gottesbeweis, der von Kant aus diesem Grunde abgelehnt wurde. Wenn die Existenz von etwas behauptet, verneint oder in Frage gestellt wird, so kann es sich nur um eine Kennzeichnung handeln, nicht um einen gegebenen Gegenstand. In unserer Symbolik kommt dies dadurch zum Ausdruck, daß $E!\,\mathbf{a}$ unter allen Umständen sinnlos ist.

Eine Kennzeichnung kann meist, aber nicht immer, symbolisch wie ein Gegenstandsname verwendet werden; zulässig ist dies immer, wenn das Gekennzeichnete existiert. Es gilt z. B. für den Namen $\mathbf{a}$: $(z)\,.\,\psi\,z\,.\supset.\,\psi\,\mathbf{a}$, aber nicht allgemein: $(z)\,.\,\psi\,z\,.\supset.\,\psi\,(\imath\,x)\,(\varphi\,x)$, sondern nur:

L 7·1. $\vdash:.\,E!\,(\imath\,x)\,(\varphi\,x)\,.\supset:(z)\,.\,\psi\,z\,.\supset.\,\psi\,(\imath\,x)\,(\varphi\,x)$

Hat das Gekennzeichnete irgend eine Eigenschaft, so existiert es:

L 7·2. $\vdash:\psi\,(\imath\,x)\,(\varphi\,x)\,.\supset.\,E!\,(\imath\,x)\,(\varphi\,x)$

8. Klassen

8 a. $\hat{z}\,(\varphi\,z)$ soll heißen: „diejenigen Werte von z, die φ befriedigen"; ein solcher Ausdruck bezeichnet eine „Klasse", in diesem Falle „die durch die Aussagefunktion $\varphi\,z$ bestimmte Klasse". Klassenzeichen werden, ebenso wie Kennzeichnungen, nicht explizit definiert, sondern durch eine Gebrauchsdefinition (**7 b**); d. h. es wird festgesetzt, was die Sätze bedeuten sollen, in denen diese Zeichen vorkommen. Die einzige ursprüngliche Art des Auftretens eines Klassenzeichens ist das Auftreten in „ϵ-Sätzen", d. h. in Sätzen von der Form „$x\,\epsilon\,\hat{z}\,(\varphi\,z)$". Die Definition des Klassenzeichens besteht darin, daß festgesetzt wird, daß ein Satz von dieser Form die Bedeutung $\varphi\,x$ haben soll. (Wir können „$x\,\epsilon\,\hat{z}\,(\varphi\,z)$" etwa interpretieren: „$x$ ist eins von denjenigen, für

die φ gilt" oder „x ist ein Element der durch φ bestimmten Klasse", und dies bedeutet nichts anderes als „$\varphi\, x$", nämlich: x befriedigt die Aussagefunktion φ). Alle anderen Arten des Auftretens eines Klassenzeichens werden durch die weiteren Definitionen zurückgeführt auf dies primäre Auftreten im ϵ-Satz.

D 8·01. $x \epsilon \hat{z}(\varphi z) \,.\!=_{\mathrm{Df}}.\, \varphi x$

8 b. Konstante Klassen, bei denen die bestimmende Aussagefunktion nicht mehr genannt zu werden braucht, bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben oder mit Buchstabengruppen mit kleinen Anfangsbuchstaben; Variable, deren Werte Klassen sind, mit kleinen griechischen Buchstaben vom Anfang des Alphabets (mit Ausnahme der Konstanten ϵ, η, ϑ, ι).

Zwei Definitionen zur Abkürzung:

D 8·021. $x, y \,\epsilon\, \alpha \,.\!=_{\mathrm{Df}}.\, x \,\epsilon\, \alpha \,.\, y \,\epsilon\, \alpha$

D 8·022. $x \sim \epsilon\, \alpha \,.\!=_{\mathrm{Df}}.\, \sim (x \,\epsilon\, \alpha)$

Auch Klassenzeichen können als gebundene Variable vorkommen; die Bedeutung der Ausdrücke $(\alpha) \,.\, \varphi \alpha$, $(\exists \alpha) \,.\, \psi \alpha$, $(\imath\, \alpha)(\varphi \alpha)$, $\hat{\alpha}(\psi \alpha)$ ergibt sich aus Analogie zu den früheren: $(x) \,.\, \varphi x$ usw.

$\hat{\alpha}(\psi \alpha)$ ist eine Klasse, deren Elemente wiederum Klassen sind, eine „Klasse zweiter Stufe". Die „Klassen dritter Stufe" haben als Elemente Klassen zweiter Stufe, usf. Variable, deren Werte Klassen zweiter oder höherer Stufe sind, bezeichnen wir zuweilen mit $\varkappa$, λ, μ, ν, ξ. „$\alpha \,\epsilon\, \mathrm{cls}$" soll heißen „$\alpha$ ist eine Klasse".

8 c. Sind φ und ψ generell äquivalent ($\varphi x \,.\!\equiv_x\!.\, \psi x$), so werden sie von denselben Gegenständen befriedigt; wir sagen deshalb von ihnen: sie haben denselben Umfang. In diesem Falle haben $y \,\epsilon\, \hat{z}(\varphi z)$ und $y \,\epsilon\, \hat{z}(\psi z)$ für jedes y denselben Aussagewert. Alle weiteren Sätze, in denen die beiden genannten Klassenzeichen vorkommen, gehen auf solche ϵ-Sätze zurück; daher kann in jedem Satze das eine Klassenzeichen für das andere eingesetzt werden, ohne den Aussagewert zu ändern. Nach der Definition der Identität (D 7·01) sind somit die beiden Klassen identisch:

L 8·1. $\vdash : \varphi x \equiv_x \psi x \,.\equiv.\, \hat{z}(\varphi z) = \hat{z}(\psi z)$

Das Klassenzeichen bezeichnet also gewissermaßen dasjenige, was bei zwei generell äquivalenten oder umfangsgleichen Aus-

sagefunktionen identisch ist; wir nennen eine Klasse deshalb auch den „Umfang“ oder die „Extension“ jeder dieser miteinander generell äquivalenten Aussagefunktionen. Es handelt sich hier um Funktionen mit éinem Argument; also: eine Klasse ist die Extension einer Eigenschaft.

8 d. Genau genommen bezeichnet ein Extensionszeichen nicht einen eigentlichen Gegenstand, sondern dient nur dazu, „extensionale“ Eigenschaften von einer Funktion auszusagen, d. h. Eigenschaften, die für alle generell äquivalenten Funktionen gleich sind. (Zur Frage, ob alle Eigenschaften von Funktionen extensionale Eigenschaften sind, vgl. unten: Extensionalitätsthese, **9 e**.) Nur weil es der Sprache Kürze und Anschaulichkeit gibt und weil es dem üblichen Sprachgebrauch entspricht, sprechen auch wir hier (im Text) so, als gäbe es einen eigentlichen Gegenstand, der durch das Extensionszeichen bezeichnet würde, sprechen also von der „Extension“, von der „Klasse“ (später auch von der „Relation“). Die logistische Sprache, im besonderen die angeführte Gebrauchsdefinition der Klassenzeichen, ist aber von dieser (vielleicht fiktiven) Annahme unabhängig. Da die Klasse nicht ein Gegenstand im Sinne ihrer Elemente ist, so darf sie nicht verwechselt werden mit dem Gegenstand, der aus den Elementen besteht (Ganzes, Summe, Haufe, Kollektion, Totalität, Gesamtheit). Die Klasse dieser Steine ist nicht etwa dieser Steinhaufe. (Man beachte ferner: auch durch eine Allaussage wird eine Totalität weder aufgestellt noch vorausgesetzt; sie sagt nur etwas über „jedes einzelne“.)

Literatur. Vgl. die Auffassung der Klassen als „logischer Fiktionen“ bei Russell [Einf.] 183; als „Quasigegenstände“ bei Carnap [Aufbau] § 32f. Zur Unterscheidung von Klasse und Kollektion: Carnap [Aufbau] § 37.

Die Klassen entsprechen den Mengen der Mengenlehre. Die Mengenlehre läßt sich (wie in PM gezeigt ist) in der Klassentheorie vollständig aufbauen. Wir nehmen aber hier in der Logistik lieber den Terminus „Klasse“, da der Terminus „Menge“ auch (und zwar vorwiegend) für den entsprechenden Begriff der axiomatischen Mengenlehre benutzt wird, der (als Variable) eine völlig andere Bedeutung hat (vgl. **31**, **30**).

9. Die Typentheorie

9 a. Sei **k** die durch die Aussagefunktion **f** x bestimmte Klasse, also **k** $= \hat{x}$ (**f** x), so bedeutet „**a** ϵ **k**“: **f a**. Wie für **a**, so mag auch für andere Werte des Argumentes sich eine wahre Aussage ergeben, für noch andere eine falsche. Sowohl diese wie jene Argumentwerte sind dann „zulässige Argumentwerte“, d. h. Gegenstände aus dem Gebiet, für das die Funktion definiert ist. Wird dagegen etwas im Vergleich zu den Gegenständen **a**, **b**, **c**, .. völlig Andersartiges eingesetzt, so ergibt sich weder ein wahrer, noch ein falscher Satz, sondern ein sinnloses Gebilde. So ist z. B. „**f k**“ sinnlos; denn **k** ist sicherlich nicht von der Art der **a**, **b**, **c**; **k** ist ja kein eigentlicher Gegenstand, sondern nur ein Zeichen, dessen Gebrauch durch die Funktion **f** erst eine Bedeutung erhält (**8 d**). Somit ist auch die Zeichenzusammenstellung „**k** ϵ **k**“ sinnlos, denn ihr Sinn könnte nur der Sinn von „**f k**“ sein (wie „**a** ϵ **k**“ den Sinn hat: **f a**), und der ist nicht vorhanden. „**k** ϵ **k**“ ist also weder ein wahrer noch ein falscher Satz, folglich auch „**k** $\sim$ ϵ **k**“ weder ein wahrer noch ein falscher Satz. Mit anderen Worten: von einer Klasse kann man nicht mit Sinn aussagen, sie gehöre zu sich selbst, oder: sie gehöre nicht zu sich selbst.

9 b. Trotzdem kann auch die Klasse **k** als Klassenelement auftreten; freilich nicht als Element ihrer selbst oder irgend einer andern Klasse, deren Elemente von der Gegenstandsart der **a**, **b**, **c** sind, sondern nur als Element einer Klasse zweiter Stufe. Die Gegenstände, die in einem bestimmten Zusammenhang nicht als Klassen (oder andere Funktionen) auftreten, heißen „Individuen“; (dieselben Gegenstände können aber ein anderesmal als Klassen auftreten; die Bezeichnung „Individuum“ gilt also nicht absolut, sondern nur in bezug auf eine Betrachtung). Es besteht dann eine Stufenreihe: Individuen, Klassen erster Stufe, Klassen zweiter Stufe usf. Dies sind die einfachsten „Typen“, deren vollständiger Aufbau („Hierarchie der Typen“) sich später durch Hinzufügung der verschiedenen Typen von Relationen ergeben wird (**13 a**). Als Variable für Individuen verwenden wir x, y, z, t, u, v, w; als Konstanten **a**, **b**, ...

Die verschiedenen Typen müssen immer scharf voneinander getrennt werden: die Elemente einer Klasse können nicht verschiedenen Typen angehören (**13 b**). Oder aus-

gesprochen als Regel über Zeichen: ein Satz von der Form „. . ∊ . .“ hat dann und nur dann einen Sinn, wenn rechts von ∊ das Zeichen einer Klasse irgend einer Stufe steht und links von ∊ ein Zeichen der nächst niederen Stufe (also auch ein Klassenzeichen, falls rechts ein Klassenzeichen von mindestens zweiter Stufe steht; oder das Zeichen eines Individuums [als eines Gegenstandes nullter Stufe], wenn rechts das Zeichen einer Klasse erster Stufe steht).

9 c. Der erste Anlaß zur Aufstellung des strengen Verbotes der Stufenvermischung ist nicht der soeben angedeutete Gedankengang gewesen, sondern das Auftreten von Widersprüchen („Antinomien“) bei Übertretung des Verbotes. Wir wollen, um ein einfaches Beispiel zu betrachten, einmal das Verbot außer acht lassen und die Satzform $\alpha \in \alpha$ für zulässig ansehen, also annehmen, daß sie für jeden Wert von α entweder einen wahren oder einen falschen Satz ergibt. Dann ist auch die Satzform $\alpha \sim \in \alpha$ zulässig, und wir können von dieser Aussagefunktion das Extensionszeichen bilden: $\hat{\alpha}(\alpha \sim \in \alpha)$; die hiermit bezeichnete Klasse zweiter Stufe (die Klasse der sich selbst nicht angehörenden Klassen) werde m genannt: $\mathsf{m} =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha}(\alpha \sim \in \alpha)$. Für m gilt nun entweder (1) $\mathsf{m} \in \mathsf{m}$, oder (2) $\mathsf{m} \sim \in \mathsf{m}$. (1) würde besagen, daß m die Aussagefunktion befriedigt, durch die m bestimmt ist, daß also gilt: $\mathsf{m} \sim \in \mathsf{m}$; die Annahme (1) führt also zu ihrem eigenen Negat, ist also falsch (nach L 5·13). Die Annahme (2) würde besagen, daß m die Aussagefunktion nicht befriedigt, durch die m bestimmt ist, also: $\sim (\mathsf{m} \sim \in \mathsf{m})$, also $\mathsf{m} \in \mathsf{m}$. Auch die zweite Annahme führt also zu einem Widerspruch. Nach dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten (L 5·14) gibt es nur die beiden Möglichkeiten (1) und (2). Da beide zu Widersprüchen führen, muß eine falsche Voraussetzung gemacht worden sein, und das kann nur die zu Beginn gemachte Voraussetzung sein, $\alpha \in \alpha$ sei eine zulässige Satzform, bezeichne eine Aussagefunktion.

Literatur: Über die Widersprüche („Paradoxien der Mengenlehre“, „logische Antinomien“) vgl. PM I, 63 ff.; Russell [Einf.] 138; Ramsey [Found.]. Über die Typentheorie: PM I 39ff., 168 ff.; Russel [Einf.] 133 ff.; zur Anwendung in der Erkenntnistheorie: Carnap [Aufbau] § 29 ff.

9 d. Für die Funktionen besteht genau dieselbe Hierarchie der Typen, wie für ihre Extensionen, die Klassen bzw. Relationen.

Den Klassen erster Stufe entsprechen die Aussagefunktionen erster Stufe, d. h. solche, deren Argumente Individuen sind; den Klassen zweiter Stufe entsprechen die Aussagefunktionen zweiter Stufe, d. h. solche, deren Argumente Aussagefunktionen erster Stufe (oder bei anderer Bezeichnungsweise: Klassen erster Stufe) sind, usf. Bei den Funktionen mit mehreren Argumenten wird die Hierarchie verwickelter; es ist dieselbe Hierarchie wie die der Relationen (**13 a**).

Russell machte früher noch eine feinere Einteilung, die „verzweigte Typentheorie". Die Aussagefunktionen desselben Typs wurden noch nach dem Vorkommen gebundener Variabler eingeteilt. Z. B. können die Aussagefunktionen erster Stufe mit éinem Argument in folgender Weise unterteilt werden: 1. Aussagefunktionen „erster Ordnung" sind solche, in deren Ausdruck keine Funktion als gebundene Variable vorkommt (Individuen können trotzdem als gebundene Variable vorkommen); diese Aussagefunktionen heißen auch „Matrices" oder „prädikative Aussagefunktionen" (in den PM: $\varphi ! x$); 2. Aussagefunktionen „zweiter Ordnung" sind solche, in denen eine Funktion erster Ordnung als gebundene Variable vorkommt, also in einem All- oder Existenzoperator; ist z. B. $\varphi ! x$ eine Funktion erster Ordnung, so ist $(\varphi) . \chi(\varphi, z)$ eine Funktion zweiter Ordnung von z; 3. Aussagefunktionen „dritter Ordnung" sind solche, in denen eine Funktion zweiter Ordnung als gebundene Variable vorkommt usw.

Die Aufstellung dieser verzweigten Typentheorie hatte gewisse Schwierigkeiten zur Folge, die überwunden werden mußten, wenn die Mathematik aus der Logik abgeleitet werden sollte. Russell wählte hierfür den gewaltsamen Ausweg, ein eigenes Axiom aufzustellen, das „Reduzibilitätsaxiom", mit dessen Hilfe es möglich wird, bei der Behandlung der Aussagefunktionen diese in einem gewissen Sinne auf die erste Ordnung zu „reduzieren", so daß die Komplikationen der verzweigten Hierarchie fortfallen.

Nach einer neueren Auffassung (Russell, PM I², S. XIV; Ramsey [Found.] 275ff.) ist die verzweigte Hierarchie und damit auch das Reduzibilitätsaxiom entbehrlich. Sie sei daher hier auch nicht näher erörtert. Die verzweigte Typentheorie war aufgestellt worden, weil man glaubte, gewisse Antinomien besonderer Art würden sich sonst nicht vermeiden lassen. (Hierher gehören z. B. die Antinomie der kleinsten Zahl, die nicht mit hundert Buchstaben bezeichnet werden kann, die Antinomie „heterologisch" u. a.) Die nähere Untersuchung scheint aber zu lehren, daß diese Antinomien nicht logischer, sondern sprachlicher Art sind; d. h. sie treten nur infolge der Mangelhaftigkeit der Wortsprache auf. (Sie enthalten nämlich alle die Scheinrelation des „Bedeutens", die in einer gereinigten Sprache überhaupt nicht vorkommt.) Das Problem dieser Antinomien ist allerdings noch nicht endgültig gelöst. Es hängt zusammen mit dem Problem der Extensionalitätsthese (**9 e**).

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die verzweigte Typentheorie (mit dem Reduzibilitätsaxiom) durchaus keinen wesentlichen Bestandteil des Russellschen Aufbaues der Logik und Mathematik bildet, sondern eliminiert werden kann. Es kann daher nicht als berechtigt angesehen werden, wenn das Russellsche System um dieses Bestandteiles willen abgelehnt oder als durchaus problematisch hingestellt wird, wie es zuweilen geschieht (z. B. Hilbert [Logik] 106ff., wo PM I² nicht berücksichtigt ist; vgl. Fraenkel [Einl.] 262 f.).

9 e. Eine Aussagefunktion, deren Argumente Aussagen oder Aussagefunktionen sind, und deren Aussagewert derselbe bleibt, wenn für eine Argumentaussage eine äquivalente Aussage oder für eine Argument-Aussagefunktion eine generell äquivalente tritt, heißt eine „extensionale“ Funktion. Die Wahrheitsfunktionen (**3 a**) sind somit extensional. Als „Extensionalitätsthese“ bezeichnen wir die (noch umstrittene) Behauptung, daß alle Aussagefunktionen, deren Argumente Aussagen oder Aussagefunktionen sind, extensional sind. Hat die These recht, so sind generell äquivalente Funktionen identisch; denn sie verleihen dann allen Funktionen, in denen sie als Argument auftreten, übereinstimmenden Aussagewert. Bei dieser Auffassung hat dann das Extensionszeichen einer Funktion keine andere Bedeutung als das Funktionszeichen selbst; oder umgekehrt ausgedrückt: alle wissenschaftlichen Begriffe können als Klassen oder Relationen dargestellt werden.

Literatur. Gegen die Ext.-These: Russell (ältere Auffassung) PM I 76f., [Einf.] 187f., Behmann [Math.] 29. Für die Ext.-These: Wittgenstein [Abh.] 243f., Russell, Vorwort zu Wittgenstein [Abh.] 194ff., PM I² S. XIV u. 659ff., Carnap [Aufbau] § 43—45.

10. Klassenverknüpfungen

10 a. Um die Klassenverknüpfungen anschaulich zu machen, kann man die Klassen durch Teilgebiete einer Zeichenfläche darstellen (Abb. 1).

Sind alle Elemente der Klasse α auch Elemente von β, so sagen wir: „α ist enthalten in β“ oder „α ist Teilklasse von β“. Diese Beziehung, die „Subsumtion“, wird bezeichnet durch „$\alpha \subset \beta$“ (gelesen „α sub β“). (Abb. 1: $\alpha \subset \beta$, $\alpha \subset \alpha$).

D 10·01. $\alpha \subset \beta \,.=_{\mathrm{Df}} : x \in \alpha \,.\supset_x .\, x \in \beta$

Um den Unterschied zwischen den Beziehungen $\in$ und $\subset$ nicht zu verwischen, ist im Sprachausdruck darauf zu achten, daß „ist enthalten in“ stets nur für $\subset$, „gehört zu“ stets nur für $\in$ verwendet wird.

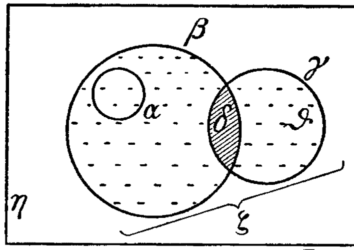


Abb. 1. Die Klassenverknüpfungen

(α, β, γ sind die drei Kreisgebiete, δ das schraffierte, ζ das teils punktierte, teils schraffierte Gebiet, η das weiße Außengebiet, ϑ das punktierte Teilgebiet von γ)

Die Klasse $\alpha \cap \beta$ (gelesen „α mal β“) bildet den gemeinsamen Teil von α und β; sie heißt „Durchschnitt“ (oder „logisches Produkt“) von α und β. (Abb. 1: $\delta = \beta \cap \gamma$).

D 10·021. $\alpha \cap \beta =_{\mathrm{Df}} \hat{x}(x \in \alpha \,.\, x \in \beta)$

Die Klasse $\alpha \cup \beta$ (gelesen „α plus β“) besteht aus allen Elementen von α und allen von β; sie heißt „Vereinigung“ (oder „logische Summe“) von α und β. (Abb. 1: $\zeta = \beta \cup \gamma$).

D 10·022. $\alpha \cup \beta =_{\mathrm{Df}} \hat{x}(x \in \alpha \,.\!\vee\!.\, x \in \beta)$

Die Klasse $-\alpha$ (gelesen „non-α“) besteht aus allen den Elementen x, für die „$x \in \alpha$“ sinnvoll aber falsch ist; sie heißt „Negat“ von α (in der Mengenlehre „Komplement“). (Abb. 1: $\eta = -\zeta$).

D 10·023. $-\alpha =_{\mathrm{Df}} \hat{x}(x \sim \in \alpha)$

Die Klasse $\alpha - \beta$ (gelesen „α non β“) besteht aus denjenigen Elementen von α, die nicht zu β gehören. (Abb. 1: $\vartheta = \gamma - \beta = \gamma - \delta$).

D 10·024. $\alpha - \beta =_{\mathrm{Df}} \alpha \cap -\beta$

10 b. Einige Lehrsätze über die Klassenverknüpfungen.

Gegenseitige Subsumtion bedeutet Identität:

L 10·1. $\vdash : \alpha \subset \beta \,.\, \beta \subset \alpha \,.\!\equiv\!.\, \alpha = \beta$

Für Durchschnitt und Vereinigung gelten das kommutative, das assoziative und das distributive Gesetz. Die Gesetze werden hier nur für den Durchschnitt angegeben, die Form für die Vereinigung ergibt sich daraus durch Vertauschung der Zeichen $\cap$ und $\cup$.

L 10·21. $\vdash \alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$

L 10·22. $\vdash . (\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \alpha \cap (\beta \cap \gamma)$

L 10·23. $\vdash . (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma) = \alpha \cap (\beta \cup \gamma)$

Die beiden Formen des Syllogismus nach barbara:

L 10·31. $\vdash : \alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma$ (Sind alle Menschen sterblich und alle Griechen Menschen, so sind alle Griechen sterblich.)

L 10·32. $\vdash : \alpha \subset \beta . x \in \alpha . \supset . x \in \beta$ (Sind alle Menschen sterblich und ist Cajus ein Mensch, so ist Cajus sterblich.)

10 c. Die „Allklasse" V ist die Klasse aller Gegenstände (eines Typus):

D 10·031. $\mathsf{V} =_{\mathsf{Df}} \hat{x}\, (x = x)$

Die „leere Klasse" Λ (auch „Nullklasse"; nicht zu verwechseln mit der Klasse 0, **19 b**) ist diejenige Klasse α, in bezug auf die für alle Gegenstände x (eines Typus) die Aussage „$x \in \alpha$" sinnvoll aber falsch ist:

D 10·032. $\Lambda =_{\mathsf{Df}} - \mathsf{V}$

Λ kommt in der Logistik viel häufiger vor als V. (Über die Mehrdeutigkeit von V und Λ in Bezug auf den Typus vgl. **13 d**, **e**.)

$\exists ! \alpha$ bedeutet: zu α gehört mindestens ein Element; α ist „nicht leer":

D 10·033. $\exists ! \alpha . =_{\mathsf{Df}} . (\exists x) . x \in \alpha$

$\alpha \, \mathsf{Fr} \, \beta$ bedeutet: α und β haben kein gemeinsames Element; α und β sind „fremd" zueinander:

D 10·034. $\alpha \, \mathsf{Fr} \, \beta . =_{\mathsf{Df}} . \alpha \cap \beta = \Lambda$

L 10·41. $\vdash . \alpha \subset \mathsf{V}$

L 10·42. $\vdash . \Lambda \subset \alpha$

L 10·43. $\vdash : \exists ! \alpha . \equiv . \alpha \neq \Lambda$

L 10·44. $\vdash : \alpha \, \mathsf{Fr} \, \beta . \equiv . \alpha \subset - \beta$

10 d. Ist $\varkappa$ eine Klasse von Klassen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, so heißt der Durchschnitt $\alpha \cap \beta \cap \gamma \cap \ldots$ aller ihrer Elementklassen „Gesamtdurchschnitt" oder kurz „Durchschnitt" (oder „Produkt") von $\varkappa$, bezeichnet mit $\mathsf{p}' \varkappa$. Die Vereinigung $\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \ldots$ aller Elementklassen von $\varkappa$ heißt „Gesamtvereinigung" oder kurz „Vereinigung" (oder „Summe") von $\varkappa$, bezeichnet mit $\mathsf{s}' \varkappa$.

D 10·041. $\mathsf{p}`\varkappa =_{\mathsf{Df}} \hat{x} (\alpha \in \varkappa . \supset_\alpha . x \in \alpha)$

D 10·042. $\mathsf{s}`\varkappa =_{\mathsf{Df}} \hat{x} \{(\exists \alpha) . \alpha \in \varkappa . x \in \alpha\}$

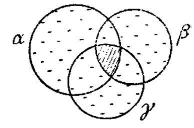


Abb. 2

Beispiel. Abb. 2. Sind α, β, γ die Elemente von $\varkappa$, so besteht $\mathsf{p}`\varkappa$ aus dem schraffierten, $\mathsf{s}`\varkappa$ aus dem teils schraffierten, teils punktierten Gebiet.

Die Klasse der Teilklassen von α bezeichnen wir mit $\mathsf{Cl}`\alpha$ (in der Mengenlehre „Potenzmenge"); unter den Teilklassen befinden sich die leere Klasse und $\alpha$ selbst. $\mathsf{Cl\,ex}`\alpha$ bezeichnet die Klasse der nichtleeren Teilklassen von α.

D 10·051. $\mathsf{Cl}`\alpha =_{\mathsf{Df}} \hat{\beta} (\beta \subset \alpha)$

D 10·052. $\mathsf{Cl\,ex}`\alpha =_{\mathsf{Df}} \hat{\beta} (\beta \subset \alpha . \exists ! \beta)$

11. Relationen

11 a. Die Bildung des Begriffes der Relation steht in genauer Analogie zu der des Begriffes der Klasse. Die folgenden Definitionen und Lehrsätze stehen in genauer Analogie zu den entsprechenden von **8**. Wir können uns daher hier kurz fassen. Eine zweistellige Relation (über mehrstellige s. **18**) ist die Extension einer Aussagefunktion $\varphi\, x\, y$ mit zwei Argumenten, in Zeichen: $\hat{x}\, \hat{y}\, (\varphi\, x\, y)$, die „Relation zwischen x und y, so daß $\varphi\, x\, y$". Ein Relationszeichen wird zwischen die Zeichen der Argumente gesetzt: „$u \quad \hat{x}\, \hat{y}\, (\varphi\, x\, y) \quad v$"; ein solcher Satz soll bedeuten: $\varphi\, u\, v$, darin besteht die Gebrauchsdefinition des Relationszeichens:

D 11·01. $u \quad \hat{x}\hat{y}\, (\varphi\, x\, y) \quad v . =_{\mathsf{Df}} . \varphi\, u\, v$

Alle weiteren Verwendungsarten von Relationszeichen gehen auf diese Satzform zurück.

11 b. Konstante Relationen, bei denen die Nennung der bestimmenden Aussagefunktion nicht mehr erforderlich ist, bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben oder Buchstabengruppen mit großem Anfangsbuchstaben (z. B. C, Smor); Variable, deren Werte Relationen sind, mit großen lateinischen Buchstaben vom Ende des Alphabets (mit Ausnahme der Konstanten V): P, Q, ... Z. Ein Relationssatz hat also die Form $x\, P\, y$; x ist hier „Vorderglied", y „Hinterglied". Auch Relationen kommen als gebundene Variable vor: $(R) . \varphi\, R$, $(\exists\, R) . \varphi\, R$ usw.

$\hat{R}(\varphi R)$ ist eine Klasse von Relationen, $\hat{\alpha}\hat{\beta}(\chi\alpha\beta)$ ist eine Relation zwischen Klassen, $\hat{P}\hat{Q}(\psi P Q)$ ist eine Relation zwischen Relationen.

„$R \in$ rel“ soll heißen: R ist eine Relation.

11 c. Relationen generell äquivalenter Beziehungen sind identisch:

L 11·1. $\vdash :. \varphi u v . \equiv_{u,v} . \psi u v : \equiv . \hat{x}\hat{y}(\varphi x y) = \hat{x}\hat{y}(\psi x y)$

11 d. Die Relationen sind Extensionen und daher, wie die Klassen, nicht Gegenstände im eigentlichen Sinne (sondern „Quasigegenstände“).

11 e. Unter den früheren Zeichen können wir die folgenden jetzt als Relationen erkennen: $=$, $\neq$, $\in$, $\subset$, Fr.
Für $=$ und $\neq$ verwenden wir fortan auch I und J.

11 f. Eine Beziehung ist gegeben, wenn die definierende Aussagefunktion angegeben ist. Eine Relation ist gegeben, wenn entweder die entsprechende Beziehung gegeben ist oder der „Bestand“ der Relation, d. h. eine Angabe darüber, in welchen Paaren die Relation besteht. Diese Bestandsangabe kann verschiedene Formen haben, unter denen (bei endlicher Gliederzahl) drei besonders brauchbar sind: Paarliste, Pfeilfigur und Matrix.

Die „Paarliste“ der Relation besteht in der Aufzählung der Relationspaare, wobei jedes Glied mit Namen genannt ist.

Die „Pfeilfigur“ der Relation **K** stellt jedes **K**-Glied durch einen (mit Namen versehenen) Punkt dar. Gilt **a K b**, so führt ein Pfeil vom Punkte **a** zum Punkte **b**; gilt **a K b . b K a**, so wird zwischen **a** und **b** ein Doppelpfeil gezeichnet; gilt **a K a**, so hat der Punkt **a** einen Rückkehrpfeil.

Die „Matrix“ der Relation **K** besteht in einem Zeilen-Kolonnenschema (s. Abb. 4), in dem jedem **K**-Glied eine Zeile und eine Kolonne entspricht (dabei gehören die oberste Zeile und die erste Kolonne links zusammen, usw.); an die Kreuzungsstelle der Zeile **a** mit der Kolonne **b** wird entweder „u“ (oder auch nur „.“; „unverknüpft“) oder „v“ („verknüpft“) gesetzt, je nachdem **a K b** oder $\sim$ (**a K b**) gilt. Die mit v besetzten Stellen heißen kurzweg „besetzt“, die anderen „unbesetzt“. Die Diagonale von oben links nach unten rechts heißt „Hauptdiagonale“; sie enthält die Stellen **a a**, **b b**, usw., also die identischen Paare. Stellen, die zur Hauptdiagonale symmetrisch liegen (z. B. **b d** und **d b**), heißen „konjugiert“ zueinander.

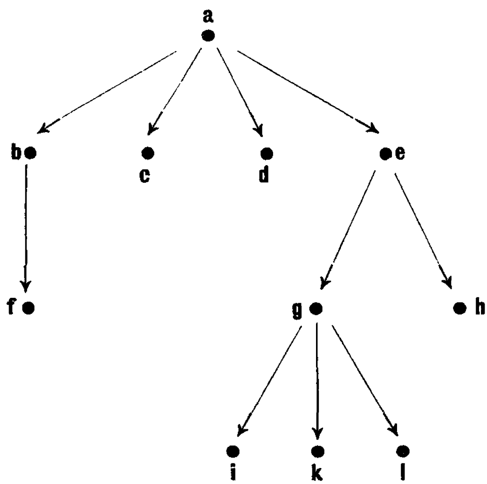


Abb. 3. Pfeilfigur der Relation **G**

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**k**	**l**
a	.	V	V	V	V	.	.	.	.	.	.
b	.	.	.	.	.	V	.	.	.	.	.
c	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
d	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
e	.	.	.	.	.	.	V	V	.	.	.
f	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
g	.	.	.	.	.	.	.	.	V	V	V
h	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
i	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
k	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
l	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Abb. 4. Matrix der Relation **G**

Beispiel 1. Die Relation **G** stelle die Abstammungsverhältnisse in einer bestimmten Klasse **k** von Personen dar. Die Namen der Personen **k** seien abgekürzt bezeichnet durch **a**, **b**, ... **l**. Die Re-

lation **G** ist dann vollständig beschrieben, wenn eine der drei folgenden Angaben gemacht wird:

a) die Paarliste von **G**: **a b, a c, a d, a e, b f, e g, e h, g i, g k, g l.**
b) die Pfeilfigur von **G**, s. Abb. 3;
c) die Matrix von **G**, s. Abb. 4.

Beispiel 2. (Mit Doppel- und Rückkehrpfeilen.) Relation **H**.
a) Paarliste: **a a, a b, b a, b c, d c, e b.**
b) Pfeilfigur, s. Abb. 5. b) Matrix, s. Abb. 6.

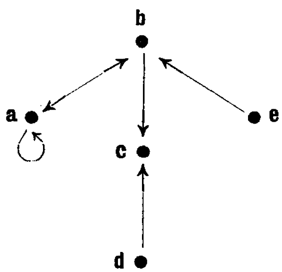


Abb. 5. Pfeilfigur der Relation **H**

	a	**b**	**c**	**d**	**e**
a	V	V	.	.	.
b	V	.	V	.	.
c	.	.	.	.	.
d	.	.	V	.	.
e	.	V	.	.	.

Abb. 6. Matrix der Relation **H**

12. Verknüpfungen von Relationen

12 a. Die folgenden Definitionen und Lehrsätze sind analog denen über die Klassenverknüpfungen (**10**).

Subsumtion („R sub S"); jedes R-Paar ist auch ein S-Paar; R „ist enthalten in" S, R ist „Teilrelation" von S:

D 12·01. $R \subset S \,.\!=_{\mathrm{Df}} : x\,R\,y \,.\!\supset_{x,\,y} .\, x\,S\,y$

Durchschnitt („R mal S"); die gemeinsamen Paare von R und S:

D 12·021. $R \cap S =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\,\hat{y}\,(x\,R\,y \,.\, x\,S\,y)$

Vereinigung („R plus S"); die Paare, für die R oder S oder beide gelten:

D 12·022. $R \cup S =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\,\hat{y}\,(x\,R\,y \,.\vee.\, x\,S\,y)$

Negat („non-R"); die Paare $x\,y$, für die $x\,R\,y$ eine sinnvolle, aber falsche Aussage ist:

D 12·023. $\dot{-}\,R =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\,\hat{y}\,\{\sim (x\,R\,y)\}$

Die R-Paare, die nicht S-Paare sind („R non S"):

D 12·024. $R \dot{-} S =_{\mathrm{Df}} R \cap \dot{-}\,S$

Darstellung durch Paarlisten. $R \mathbin{\dot{\subset}} S$ gilt, wenn alle Paare der R-Liste auch in der S-Liste vorkommen. Die Liste von $R \mathbin{\dot{\cap}} S$ enthält die Paare, die in jeder der beiden Listen vorkommen. Die Liste von $R \mathbin{\dot{\cup}} S$ besteht aus der Zusammenfügung beider Listen (unter Streichung der Doppelvorkommen). Die Liste von $\dot{-}\, R$ enthält alle nicht in der R-Liste vorkommenden Paare von Elementen des Typus. Die Liste von $R \mathbin{\dot{-}} S$ entsteht aus der R-Liste durch Streichung der Paare der S-Liste (soweit sie in der R-Liste überhaupt vorkommen).

12 b. Für die folgenden Lehrsätze vgl. die Bemerkungen zu den entsprechenden über Klassen (**10 b**).

L 12·1. $\vdash : R \mathbin{\dot{\subset}} S \,.\, S \mathbin{\dot{\subset}} R \,.\equiv.\, R = S$

L 12·21. $\vdash .\, R \mathbin{\dot{\cap}} S = S \mathbin{\dot{\cap}} R$

L 12·22. $\vdash .\, (R \mathbin{\dot{\cap}} S) \mathbin{\dot{\cap}} T = R \mathbin{\dot{\cap}} (S \mathbin{\dot{\cap}} T)$

L 12·23. $\vdash .\, (R \mathbin{\dot{\cap}} S) \mathbin{\dot{\cup}} (R \mathbin{\dot{\cap}} T) = R \mathbin{\dot{\cap}} (S \mathbin{\dot{\cup}} T)$

L 12·31. $\vdash : R \mathbin{\dot{\subset}} S \,.\, S \mathbin{\dot{\subset}} T \,.\supset.\, R \mathbin{\dot{\subset}} T$

L 12·32. $\vdash : R \mathbin{\dot{\subset}} S \,.\, x R y \,.\supset.\, x S y$

12 c. Die Allrelation $\dot{V}$ gilt für jedes Paar (eines Typus), die leere Relation $\dot{\Lambda}$ für kein Paar; $\dot{\exists}!\, R$ heißt: R ist nicht leer.

D 12·033. $\dot{\exists}!\, R \,.=_{\mathrm{Df}}.\, (\exists x, y) \,.\, x R y$

L 12·43. $\vdash : \dot{\exists}!\, R \,.\equiv.\, R \neq \dot{\Lambda}$

12 d. Ist λ eine Klasse von Relationen P, Q, R, ..., so heißt der Durchschnitt $P \mathbin{\dot{\cap}} Q \mathbin{\dot{\cap}} R \mathbin{\dot{\cap}} \ldots$ aller ihrer Elementrelationen kurz „Durchschnitt“ von λ, bezeichnet mit $\dot{p}`\lambda$. Die Relation $\dot{p}`\lambda$ gilt dann in einem Paar, wenn in ihm jede der Relationen $P, Q, \ldots$ gilt. Die Vereinigung $P \mathbin{\dot{\cup}} Q \mathbin{\dot{\cup}} R \mathbin{\dot{\cup}} \ldots$ aller Elementrelationen von λ heißt kurz „Vereinigung“ von λ, bezeichnet mit $\dot{s}`\lambda$. Die Relation $\dot{s}`\lambda$ gilt dann in einem Paar, wenn in ihm (mindestens) eine der Relationen $P, Q, \ldots$ gilt.

Die Klasse der Teilrelationen von P wird bezeichnet mit $\mathrm{Rl}`P$; die der nichtleeren Teilrelationen mit $\mathrm{Rl\,ex}`P$.

12 e. Um hier und später **Beispiele** bilden zu können, mögen **bestimmte Zeichen für einige nichtlogische Klassen und Relationen** festgesetzt werden. Es soll bezeichnen: **ml** die Klasse der männlichen Menschen (kurz „die männlichen Menschen“; eine Klasse

benennen wir im Worttext gewöhnlich kurz durch ein Substantiv im Plural mit bestimmtem Artikel), **wl** die weiblichen Menschen, **kra** die Kanken, **berl** die Berliner, **stud** die Studierenden; **ganz** die positiven ganzen (reellen) Zahlen, **pos** die positiven reellen Zahlen, **rat** die rationalen Zahlen, **prim** die Primzahlen.

Va die Relation „Vater“ (wir benennen eine Relation gewöhnlich kurz mit einem Relationssubstantiv oder einem Komparativ: „Vater“ bedeutet die Relation „ist Vater von“; „größer“ bedeutet „ist größer als“); **Bru** die Relation Bruder, **Schw** Schwester, **Eh** Ehemann, **Elt** Elter (d. h. einer der Eltern), **Leh** Lehrer, **Freund** Freund. **Sin** die Relation Sinus (d. h. $\hat{x}\hat{y}\,(x = \sin y)$), **Quadr** das Quadrat (einer Zahl), **Halb** die Hälfte (einer Zahl), **Gr** größer (zwischen positiven ganzen Zahlen).

Beispiele. 1. Klassenverknüpfungen. **ml ∩ kra** die männlichen Kranken, **— kra** die Gesunden; **⊢ . ml Fr wl**; **stud ∩ kra** die kranken Studierenden, **berl — kra** die gesunden Berliner. **⊢ . prim ⊂ pos** die Primzahlen sind positive Zahlen.

2. Relationsverknüpfungen. **a Leh ∩̇ Freund b** a ist zugleich Lehrer und Freund von **b**; x **Bru ∪̇ Schw** y x ist Bruder oder Schwester von y; **⊢ . Bru ⊂̇ —̇ Va** jemandes Bruder ist niemals sein Vater; **⊢ . Va ⊂̇ Elt**.

13. Die Hierarchie der Typen

13 a. Bei den Klassen hatten wir eine einfache Stufenfolge: die Gegenstände („Individuen“), die nicht als Klassen, sondern nur als Elemente von Klassen auftreten, die Klassen erster Stufe (deren Elemente Individuen sind), die Klassen zweiter Stufe (deren Elemente Klassen erster Stufe sind), usf. Wir wollen die hierdurch charakterisierten Typen mit **t 0**, **t 1**, **t 2** .... bezeichnen.

Durch die Einführung der Relationen wird der Stufenbau der Typen verwickelter, da wir einerseits bei einer Relation den Typus der Vorderglieder und den der Hinterglieder unterscheiden müssen, und andererseits die Relationen wieder als Elemente von Klassen neuen Typs auftreten können.

Von einer Relation, deren Vorderglieder vom Typus tm sind und deren Hinterglieder vom Typus tn sind, sagen wir, sie sei vom Typus t(mn) oder t[mn]. So gibt es also z. B. die Typen **t(00)**, **t(01)**, **t(02)**, ... **t(10)**, **t(11)**, usf. Nun können aber die Glieder einer Relation nicht nur Individuen oder Klassen sein, sondern auch wieder Rela-

tionen (freilich, wie wir noch erörtern werden, nur Relationen von anderen, und zwar niederen Typen als die Relation selbst). Da wenden wir die genannte Bezeichnungsregel in analoger Form an: sind die Vorderglieder einer Relation vom Typus t ξ und die Hinterglieder vom Typus t π (hierbei vertreten ξ und π nicht nur einfache Zahlzeichen, sondern auch beliebig zusammengesetzte Ausdrücke mit allen Klammern), so sagen wir, die Relation sei vom Typus t (ξ π) oder t [ξ π]; auf die Mitübertragung auch einer ganz außenstehenden Klammer ist dabei genau zu achten. Sind z. B. die Vorderglieder einer Relation Individuen, die Hinterglieder Relationen vom Typus t (20), so ist die Relation selbst vom Typus t [0 (20)]. Entsprechendes gilt auch für mehrstellige Relationen (**18**); z. B. hat eine dreistellige Relation, deren Glieder erster Stelle Klassen zweiter Stufe und deren Glieder zweiter und dritter Stelle Individuen sind, den Typus t (200).

Nun müssen wir auch noch eine Regel für kompliziertere Klassen aufstellen: haben die Elemente einer Klasse den Typus t ξ, so sagen wir, die Klasse sei vom Typus t (ξ). Sind z. B. die Elemente der Klasse Relationen vom Typus t (10), so hat die Klasse den Typus t ((10)). Anstatt t (0) schreiben wir, wie anfangs angegeben, auch einfacher t 1, anstatt t (1) t 2 usw.

13 b. Die Hauptregel der Typentheorie lautet nun: die Werte eines bestimmten Argumentes einer bestimmten Aussagefunktion können nur Gegenstände vom gleichen Typus sein. Daraus folgt: alle Elemente einer bestimmten Klasse müssen vom gleichen Typus sein, ebenso alle Vorderglieder einer bestimmten Relation, ebenso alle Hinterglieder einer bestimmten Relation (es können aber Vorder- und Hinterglieder derselben Relation von verschiedenem Typus sein), allgemein alle Glieder der gleichen Stelle einer bestimmten Relation. (Das Gesagte gilt nicht nur für die Elemente einer Klasse, sondern für die Elemente und Nichtelemente zusammen: $\alpha \cup - \alpha$ stellt den Typus der Elemente (und zugleich den der Nichtelemente) von α dar; Entsprechendes gilt bei den Relationen). Hieraus folgt unter anderm die frühere Regel (**9 a, c**): die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit einer Klasse zu sich selbst kann nicht mit Sinn ausgesagt werden; denn wenn die Klasse vom Typus t (ξ) ist, so sind nur die Gegenstände vom Typus t ξ Elemente oder Nichtelemente von ihr, und da t (ξ) und t ξ verschieden sind, so kann die Klasse nicht selbst eins ihrer Elemente oder Nichtelemente sein.

13 c. Unter der Stufe eines Gegenstandes verstehen wir eine be-

stimmte Zahl, die durch den Typus des Gegenstandes bestimmt ist; zu einer Stufe können verschiedene Typen gehören.

Die Stufenzahl ist die größte der Summen, die sich ergeben, wenn man zu einer in dem Typusausdruck vorkommenden Zahl die Anzahl der Klammern, in die er eingeschlossen ist, addiert. Beispiel: Typus t 4: Stufe 4; t (03): Stufe 4; t [(03) (01)]: Stufe 5. Die Elemente (und Nichtelemente) einer bestimmten Klasse sind, da von gleichem Typus, auch von gleicher Stufe; ebenso die Glieder (und Nichtglieder) gleicher Stelle einer bestimmten Relation.

Die Stufe eines Individuums ist 0; die Stufe einer Klasse ist stets um 1 höher als die Stufe ihrer Elemente; die Stufe einer Relation ist stets um 1 höher als die Stufe ihrer höchststufigen Glieder.

13 d. Methodische Vieldeutigkeit. Sind α, β zwei Klassen erster Stufe und $\varkappa$, λ zwei Klassen zweiter Stufe, und ist α in β enthalten und $\varkappa$ in λ, so dürften wir nach der Regel der Typentheorie streng genommen nicht schreiben „$\alpha \subset \beta$" und „$\varkappa \subset \lambda$", denn dann wären die Glieder der Relation $\subset$ das eine Mal Klassen erster Stufe, das andere Mal Klassen zweiter Stufe, also von verschiedener Stufe und verschiedenem Typus. Genau genommen müßten wir hier verschiedene Relationen unterscheiden, die wir etwa mit $\subset_1$, $\subset_2$, ... bezeichnen könnten. Aber wir kämen nicht einmal mit einer einfachen Reihe solcher Relationen aus, denn wir brauchen doch auch z. B. die Relation der Subsumtion zwischen Klassen vom Typus t ((0 [1 (10)])), also eine Relation $\subset_{((0\,[1\,(10)]))}$ und unendlich viele andere.

Die Lehrsätze, die von einer jeden solchen $\subset$-Relation gelten, sind aber nun einander genau analog. Daher bewirken wir eine ungeheure Vereinfachung, wenn wir sie nicht für jede $\subset$-Relation gesondert aufstellen, sondern nur einmal für alle, indem wir sie mit dem Zeichen $\subset$ ohne Index schreiben. Z. B. ist der Lehrsatz von der Transitivität der Relation $\subset$: $\vdash : \alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma$ (L 10·31) streng genommen nicht éin bestimmter Lehrsatz, sondern eine Anweisung, um in jedem bestimmten Falle den betreffenden einzelnen Lehrsatz über eine bestimmte der $\subset$-Relationen hiernach aufstellen zu können. Das Zeichen $\subset$ hat hier also eine „methodische Vieldeutigkeit", indem es Relationen von verschiedenem Typus vertritt. Entsprechendes gilt für alle logischen Konstanten, die Klassen, Rela-

tionen oder Verknüpfungen zwischen solchen (∩, ∤, +) sind. In dieser methodischen Weise angewandt, kann die Übertretung der Hauptregel der Typentheorie nicht zu Unstimmigkeiten führen.

13 e. Diese Zeichen, die methodisch vieldeutig angewandt werden, haben somit keinen bestimmten Typus. Es zeigt sich jedoch, daß die verschiedenen Typen der verschiedenen Bedeutungen des bestimmten Zeichens stets zurückgehen auf einen niedersten Typus, den „Grundtypus" des Zeichens; die Stufe des Grundtypus heißt „Grundstufe".

Es sei die Hierarchie der Grundtypen für einige logische Konstanten angegeben:

1. Klassen.

Zeichen von der Grundstufe 0, also Zeichen für Individuen, können als logische Konstanten nicht auftreten.

Grundstufe 1: Λ, V haben den Grundtypus t1.

Grundstufe 2: cls t2; rel, $\alpha \overline{\mathrm{sm}} \beta$, $P \overline{\mathrm{smor}} Q$, trans, sym, refl, ser t((00)).

Grundstufe 3: nc t3; nr t(((00))).

2. Relationen.

Grundstufe 1: V̇, Λ̇, I, J haben den Grundtypus t(00).

Grundstufe 2: Sm t(11); ⊂̇, Cnv, Smor t[(00) (00)]; D, Ɑ, C t[1 (00)]; F, B t[0 (00)]; ϵ t(01); ⊂ t(11); ι t(10).

Grundstufe 3: Sg, Gs t[(10) (00)]; Cl, Nc t(21); p, s t(12); ṗ, ṡ t[(00) ((00))]; Rl, Pot, Potid, Nr t[((00)) (00)].

14. Kennzeichnende Funktionen

14 a. Die bisher behandelten Funktionen waren fast durchweg Aussagefunktionen. Jetzt sollen die Gegenstandsfunktionen eingeführt werden, also solche, deren Werte Gegenstände sind. Ein Beispiel ist etwa „der Vater von y". Funktionen dieser Art heißen „kennzeichnende Funktionen", da sie, wenn der Argumentwert angegeben wird, einen bestimmten Gegenstand durch Umschreibung indirekt kennzeichnen, zum Unterschied von Namen, die ihren Gegenstand direkt bezeichnen.

$R'y$ (gelesen „R von y") bedeutet: „dasjenige x, das die Relation R zu y hat":

D 14·01. $R'y =_{\mathrm{Df}} (\imath x)(x R y)$

$R'y$ ist eine kennzeichnende Funktion. Gemäß den früheren Überlegungen über Kennzeichnungen (**7 b**) können Aussagen über $R'x$ nur wahr sein, wenn es ein und nur ein x gibt, das die Relation R zu y hat. Die kennzeichnenden Funktionen sind in der Relationstheorie von großer Bedeutung. Die (einwertigen) Funktionen der Mathematik sind Beispiele für kennzeichnende Funktionen: z. B. bedeutet „*sin y*": „das, was die *sin*-Beziehung zu y hat", „der Sinus von y".

$\mathsf{p}'\varkappa$, $\mathsf{s}'\varkappa$, $\mathsf{Cl}'\alpha$ (**10 d**), $\dot{\mathsf{p}}'x$, $\dot{\mathsf{s}}'x$, $\mathsf{Rl}'P$ (**12 d**) sind auch kennzeichnende Funktionen.

Zur Ersparung von Klammern:

D 14·02. $R'S'y =_{\mathrm{Df}} R'(S'y)$

L 14·1. $\vdash :. x = R'y . \equiv : (z) : z R y . \equiv . z = x$ (x ist dann und nur dann das R von y, wenn x und nur x in der Relation R zu y steht).

L 14·2. $\vdash :: \mathrm{E}! R'y . \equiv :. (\exists x) :. (z) : z R y . \equiv . z = x$ (Das R von y existiert dann und nur dann, wenn es ein x gibt, das als einziges zu y in der Relation R steht).

Beispiele. (Zeichen s. **12 e**). **Va'a** der Vater des **a**. **Bru'a ϵ berl** „der Bruder des **a** ist Berliner"; diese Aussage ist dann falsch, wenn entweder **a** keinen Bruder hat, oder mehr als einen, oder zwar genau einen, dieser aber nicht Berliner ist; andernfalls wahr. x **Gr Halb'**x „x ist größer als die Hälfte von x". **Quadr'Sin'** y bedeutet $sin^2\, y$. $\vdash : (x, y) : x$ **Bru** $y . \supset . \mathrm{E}!$ **Va'**x . **Va'**x = **Va'**y

14 b. Durch eine Kennzeichnung von der Form $R'y$ wird ein einzelnes R-Glied gekennzeichnet. Folgende Kennzeichnungen bestimmen dagegen Klassen von R-Gliedern: $\overrightarrow{R}'y$ (gelesen „R Rechtspfeil von y") ist die Klasse der Glieder, die zu y in der Relation R stehen, die „R-Vorgänger" von y, kurz „die R von y"; $\overleftarrow{R}'x$ (gelesen „R-Linkspfeil von x") ist die Klasse der Glieder, zu denen x in der Relation R steht, die „R-Nachfolger" von x; $R''\beta$ (oder $R_\epsilon'\beta$) ist die Klasse der Glieder, die zu den Elementen von β in der Relation R stehen, kurz „die R von den β". Der Einfachheit halber definieren wir nicht die Relation $\overrightarrow{R}$, sondern

die kennzeichnende Funktion $\overrightarrow{R}$'y; ebenso meist bei denjenigen Relationen, die hauptsächlich in der Form kennzeichnender Funktionen verwendet werden. Die korrekte Definition kann ja leicht rekonstruiert werden; hier z. B. wäre sie: $\overrightarrow{R} =_{Df} \hat{a}\,\hat{y}\,\{a = \hat{x}\,(x\,R\,y)\}$. Ist eine Relation durch einen zusammengesetzten Ausdruck angegeben, über dem die Pfeile schlecht anzubringen sind, so schreiben wir anstatt $\overrightarrow{R}$: Sg'R (von *sagitta*), anstatt $\overleftarrow{R}$: Gs'R.

D 14·03. $\overrightarrow{R}$' $y =_{Df} \hat{x}\,(x\,R\,y)$

D 14·04. $\overleftarrow{R}$' $x =_{Df} \hat{y}\,(x\,R\,y)$

D 14·05. R'' $\beta =_{Df} \hat{x}\,\{(\exists\, y) \,.\, y \in \beta \,.\, x\,R\,y\}$

D 14·06. R_{ϵ}' $\beta =_{Df} R$'' β

Während R' y nicht in jedem Falle existiert, sondern nur, wenn die Einzigkeitsbedingung erfüllt ist, existiert $\overrightarrow{R}$'y stets, kann aber natürlich die leere Klasse sein.

L 14·3. $\vdash : x \in \overrightarrow{R}$'$y \,. \equiv .\, x\,R\,y$

L 14·4. $\vdash : y \in \overleftarrow{R}$'$x \,. \equiv .\, x\,R\,y$

Mit Hilfe dieser beiden Sätze kann eine Relationsaussage verwandelt werden in eine Klassenaussage (ϵ-Aussage).

Beispiele. $\overrightarrow{\textbf{Bru}}$' **a** die Brüder des **a**; $\overleftarrow{\textbf{Bru}}$' **a** die, deren Bruder **a** ist. $\overleftarrow{\textbf{Sin}}$'$x$ die Klasse der Zahlen, deren Sinus x ist, also die Klasse der Werte von *arc sin* x; $\overleftarrow{\textbf{Quadr}}$'$x$ die Klasse der Quadratwurzeln aus x; **Gr'3** die Klasse der (ganzen) Zahlen größer als **3**. **Va''stud** die Väter von Studierenden. **Quadr''(prim** $\cap$ $\overleftarrow{\textbf{Gr}}$**'100)** die Quadrate der Primzahlen unter **100**; **Quadr''prim** $\cap$ $\overleftarrow{\textbf{Gr}}$**'100** die weniger als **100** betragenden Quadrate von Primzahlen.

Anwendung. Die folgenden Beispiele des II. Teiles (angewandte Logistik) können jetzt verstanden werden: **32 a, 40, 43** (teilweise).

15. Die Konverse; Bereiche und Feld

15 a. Die durch „Umkehrung" einer Relation R entstehende Relation, d. h. diejenige, die in allen R-Paaren in umgekehrter

Richtung gilt, heißt die „Konverse" von R. Sie wird bezeichnet mit $\breve{R}$ (gelesen „R konvers") oder (für zusammengesetzte Ausdrücke) $\mathsf{Cnv}`R$.

D 15·01. $\breve{R} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{y}\,(y\,R\,x)$

Die Paarliste von $\breve{R}$ entsteht durch Umkehrung jedes Paares der R-Liste. Die Pfeilfigur von $\breve{R}$ entsteht durch Umkehrung der Richtung jedes Pfeiles der R-Figur. Die Matrix von $\breve{R}$ entsteht aus der R-Matrix durch Umkippen um die Hauptdiagonale (dadurch werden die konjugierten der besetzten Felder besetzt).

L 15·11. $\vdash : x\,\breve{R}\,y\,.\equiv.\,y\,R\,x$

L 15·12. $\vdash .\,\breve{\breve{R}} = R$ (Die Konverse der Konversen von R ist R selbst.)

Fallen $\breve{R}$ und R zusammen ($\breve{R} = R$; es genügt: $\breve{R} \subset R$), so heißt R „symmetrisch" ($R \in \mathsf{sym}$), andernfalls „nicht-symmetrisch", und zwar „asymmetrisch" ($R \in \mathsf{as}$), wenn $\breve{R}$ und R einander ausschließen ($\breve{R} \subset \dot{-} R$).

D 15·02. $\mathsf{sym} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\,(\breve{R} \subset R)$

D 15·03. $\mathsf{as} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\,(\breve{R} \subset \dot{-} R)$

Die Pfeilfigur einer symmetrischen Relation enthält nur Doppelpfeile (zu denen auch die Rückkehrpfeile gehören), die einer asymmetrischen Relation keine. Die Matrix einer symmetrischen Relation ist symmetrisch in bezug auf die Hauptdiagonale; eine zu einer besetzten Stelle konjugierte ist auch besetzt. In der Matrix einer asymmetrischen Relation ist jede zu einer besetzten Stelle konjugierte unbesetzt.

Beispiele. **a** $\breve{\textbf{Va}}$ **b** **b** ist Vater von **a**; $\breve{\textbf{Eh}}$ Ehefrau; $\breve{\textbf{Halb}}$'x das Doppelte von x; $\breve{\textbf{Va}}$"**stud** die Kinder von männlichen Studierenden. $\vdash .\,\breve{\textbf{Va}} \subset \dot{-}\,\textbf{Va}$, also $\vdash .\,\textbf{Va} \in \mathsf{as}$. **Bru** ist nicht-symmetrisch, aber auch nicht asymmetrisch: $\vdash .\,\textbf{Bru} \in -\,\mathsf{sym} - \mathsf{as}$; es gilt weder $\breve{\textbf{Bru}} \subset \textbf{Bru}$ noch $\breve{\textbf{Bru}} \subset \dot{-}\,\textbf{Bru}$.

15 b. Die Klasse der Glieder von R, die als Vorderglieder vorkommen, heißt der „Vorbereich" von R, bezeichnet mit $\mathsf{D}`R$ (aus „*dominium*"); die Klasse der Hinterglieder heißt der „Nach-

bereich“ von R, $\text{Ԁ}'R$. Die Vereinigung beider Bereiche heißt das „Feld“ von R, bezeichnet mit $\mathsf{C}'R$ (aus „*campus*“). Gehören Vorder- und Hinterglieder einer Relation zum gleichen Typus, so heißt die Relation „homogen“, andernfalls „inhomogen“. Da nur typengleiche Klassen eine Vereinigung haben, so haben nur homogene Relationen ein Feld. $x\,\mathsf{F}R$ bedeutet: x ist ein R-Glied.

Pfeilfigur: Der Vorbereich besteht aus den Punkten, von denen Pfeile ausgehen, der Nachbereich aus denen, zu denen Pfeile hingehen (Punkte mit Rückkehrpfeilen gehören also zu beiden Bereichen). Matrix: Der Vorbereich besteht aus den Gliedern, deren Zeilen besetzte Stellen haben, der Nachbereich aus denen, deren Kolonnen besetzte Stellen haben. Die Matrixdarstellung in der früher erklärten Form bezieht sich nur auf homogene Relationen.

D 15·041. $\mathsf{D}'R =_{\mathsf{Df}} \hat{x}\,\{(\exists\, y)\,.\, x\,R\,y\}$

D 15·042. $\text{Ԁ}'R =_{\mathsf{Df}} \hat{y}\,\{(\exists\, x)\,.\, x\,R\,y\}$

D 15·043. $\mathsf{C}'R =_{\mathsf{Df}} \mathsf{D}'R \cup \text{Ԁ}'R$

D 15·044. $\mathsf{F} =_{\mathsf{Df}} \hat{x}\,\hat{R}\,(x \in \mathsf{C}'R)$

L 15·21. $\vdash .\, \text{Ԁ}'R = \mathsf{D}'\breve{R}$

L 15·22. $\vdash : \text{Ԁ}'R \subset \mathsf{D}'R \,.\equiv.\, \mathsf{D}'R = \mathsf{C}'R$

L 15·23. $\vdash : \mathsf{D}'R \subset \text{Ԁ}'R \,.\equiv.\, \text{Ԁ}'R = \mathsf{C}'R$

Die linken Seiten der beiden letzten Äquivalenzen bedeuten, daß R kein End- bzw. kein Anfangsglied hat (**25 a**).

Beispiele. $\mathsf{D}'\mathsf{Eh}$ die Ehemänner, $\text{Ԁ}'\mathsf{Eh}$ die Ehefrauen, $\mathsf{C}'\mathsf{Eh}$ die verheirateten Leute. $\mathsf{D}'\mathsf{Va}$ die Väter. $\mathsf{D}'(\mathsf{Va} \dot{\cap} \mathsf{Leh})$ die Väter, die Lehrer eines eigenen Kindes sind; $\mathsf{D}'\mathsf{Va} \cap \mathsf{D}'\mathsf{Leh}$ die (umfassendere) Klasse der Väter, die zugleich überhaupt Lehrer sind.

15 c. Die Teilrelation von R, die durch Beschränkung des Vorbereiches von R auf die Klasse α entsteht, wird bezeichnet mit $\alpha \upharpoonleft R$ (gelesen „R vorbeschränkt auf α“); entsprechend bei Beschränkung des Nachbereiches: $R \upharpoonright \beta$ („R nachbeschränkt auf β“); im Falle beider Beschränkungen: $\alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta$; bei Beschränkung des Feldes: $R \upharpoonleft\!\upharpoonright \gamma$ („R beschränkt auf γ“).

D 15·051. $\alpha \upharpoonleft R =_{\mathsf{Df}} \hat{x}\hat{y}\,(x \in \alpha \,.\, x\,Ry)$

D 15·052. $R \upharpoonright \beta =_{\mathsf{Df}} \hat{x}\hat{y}\,(x\,R\,y \,.\, y \in \beta)$

D 15·053. $\alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{y}\,(x \in \alpha \,.\, x R y \,.\, y \in \beta)$

D 15·054· $R \upharpoonright\!\!\downharpoonright \alpha =_{\mathrm{Df}} \alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \alpha$

Die Relation, die zwischen jedem Element von α und jedem Element von β und nur zwischen solchen besteht, wird bezeichnet mit $\alpha \uparrow \beta$ („α Pfeil β“).

D 15·06. $\alpha \uparrow \beta =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{y}\,(x \in \alpha \,.\, y \in \beta)$

L 15·31. $\vdash .\, \mathrm{Cnv}`(R \upharpoonright \beta) = \beta \upharpoonleft \breve{R}$

L 15·32. $\vdash .\, \mathrm{D}`(\alpha \upharpoonleft R) = \alpha \cap \mathrm{D}`R$

L 15·33. $\vdash .\, \mathrm{D}`(R \upharpoonright \beta) = R``\beta$

L 15·34. $\vdash .\, \in \upharpoonright \varkappa = \hat{x}\hat{\alpha}\,(x \in \alpha \,.\, \alpha \in \varkappa)$

Beispiele. Bedeutet **Geschw** die Geschwisterrelation, so können wir definieren: **Bru** $=_{\mathrm{Df}}$ **ml** $\upharpoonleft$ **Geschw**, **Schw** $=_{\mathrm{Df}}$ **wl** $\upharpoonleft$ **Geschw**. Eine arithmetische Funktion wird in der Relationstheorie dargestellt als eine Relation zwischen den Funktionswerten und den Argumentwerten (z. B. **Quadr**, **Sin**). Sollen als Argumentwerte einer Funktion nur reelle Zahlen bzw. nur rationale, nur positive, nur ganze Zahlen vorkommen, so ergibt das eine nachbeschränkte Relation; z. B. **Quadr** $\upharpoonright$ **ganz**, **Quadr** $\upharpoonright$ **pos**. Was bedeutet: **Gr** $\upharpoonright$ **ganz**, **Gr** $\upharpoonright$ **rat**, **berl** $\upharpoonleft$ **Va**, **Va** $\upharpoonright$ **berl**, **Va** $\upharpoonright\!\!\downharpoonright$ **berl**?

16. Die Verkettung

16 a. Gilt $x R y$ und $y S z$, so bezeichnen wir die Relation, die damit zwischen x und z besteht, als „Verkettung“ (oder „Relationsprodukt“) von R und S, in Zeichen: $R \mid S$ (gelesen „R vor S“). R und S haben nur dann eine Verkettung, wenn $\mathrm{G}`R$ und $\mathrm{D}`S$ vom gleichen Typus sind; die Verkettung ist nur dann nicht leer, wenn $\mathrm{G}`R \cap \mathrm{D}`S$ nicht leer ist (L 16·31). Anstatt $R \mid R$ schreiben wir auch R^2 („R hoch 2“), anstatt $R^2 \mid R$ auch R^3 usf.; diese Relationen heißen „zweite, dritte, ... Potenz von R“. R selbst gilt als erste Potenz; aus Analogiegründen können wir die Identität im Felde von R als nullte Potenz R^0 auffassen.

Zur Ersparung von Klammern wird festgesetzt: $\mid$ bindet stärker als $\dot{\cup}$, $\dot{\cap}$, $\dot{-}$. Für $P \,\dot{\cup}\, (Q \mid R)$ schreiben wir also einfach: $P \,\dot{\cup}\, Q \mid R$; für $(P \mid Q) \,\dot{\cup}\, R$ einfach: $P \mid Q \,\dot{\cup}\, R$ usf.

D 16·01. $R \mid S =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{z}\,\{(\exists y) \,.\, x R y \,.\, y R z\}$

D 16·02. $R^0 =_{\mathrm{Df}} \mathrm{I} \upharpoonright \mathrm{C}`R$

L 16·11. $\vdash . \mathsf{Cnv}`(R \mid S) = \breve{S} \mid \breve{R}$ (Die Umkehrung einer Verkettung geschieht durch Vertauschung und gleichzeitige Umkehrung der beiden Relationen.)

L 16·12. $\vdash . (P \mid Q) \mid R = P \mid (Q \mid R)$ Assoziatives Gesetz; hiernach genügt die Schreibweise $P \mid Q \mid R$. Ein kommutatives Gesetz gilt für die Verkettung nicht (Bruder des Vaters ist nicht Vater des Bruders).

Die distributiven Gesetze (für $\dot{\cup}$ Identität, für $\dot{\cap}$ nur Subsumtion!):

L 16·21. $\vdash . P \mid (Q \dot{\cup} R) \;=\; P \mid Q \dot{\cup} P \mid R$

L 16-22. $\vdash . (P \dot{\cup} Q) \mid R \;=\; P \mid R \dot{\cup} Q \mid R$

L 16·23. $\vdash . P \mid (Q \dot{\cap} R) \;\dot{\subset}\; P \mid Q \dot{\cap} P \mid R$

L 16·24. $\vdash . (P \dot{\cap} Q) \mid R \;\dot{\subset}\; P \mid R \dot{\cap} Q \mid R$

L 16.31. $\vdash : \exists! \, \text{Ɑ}`R \cap \mathsf{D}`S . \equiv . \dot{\exists}! \, R \mid S$ (s. o.!)

L 16·32. $\vdash . \mathsf{D}`(R \mid S) \subset \mathsf{D}`R . \text{Ɑ}`(R \mid S) \subset \text{Ɑ}`S$

L 16·33. $\vdash : \mathsf{E}! \, P`Q`z . \supset . P`Q`z = (P \mid Q)`z$ (s. u. Beispiel)

L 16·34. $\vdash . (R \mid S)``\gamma = R``S``\gamma$

L 16·41. $\vdash . R^0 \mid R = R \mid R^0 = R$

L 16·42. $\vdash . \breve{\epsilon} \mid \epsilon = \dot{-} \mathsf{Fr}$

Beispiele. **Bru | Va** bedeutet „Onkel" (i. S. v. Vatersbruder); **Va**^{2} Großvater (väterlicherseits); **Eh | Schw, Bru | Eh, Bru |** $\breve{\textbf{Eh}}$ sind die drei Arten der Schwagerrelation.

Quadr | Sin ist die Relation „Quadrat des Sinus". Das folgende Beispiel zeigt den Unterschied zwischen $(R \mid S)`z$ und $R`S`z$ (L 16·33; dagegen L 16·34 ohne Existenzbedingung!). **Wur** bedeute „reelle Quadratwurzel"; **Wup** „positive Quadratwurzel" [**Wur** $=_{\mathrm{Df}}$ $\breve{\textbf{Quadr}}$; **Wup** $=_{\mathrm{Df}}$ **pos** $\upharpoonleft$ $\breve{\textbf{Quadr}}$]. Dann gilt: $\vdash . \mathsf{E}! \, (\textbf{Wup} \mid \textbf{Wur})`\textbf{81}$ und $\vdash . (\textbf{Wup} \mid \textbf{Wur})`\textbf{81} = \textbf{3}$. Dagegen existiert **Wup'Wur'81** nicht, weil **Wur'81** nicht existiert, da es mehr als eine reelle Quadratwurzel aus **81** gibt.

16 b. R heißt „transitiv" ($R \in \mathsf{trans}$), wenn $R^2 \dot{\subset} R$, d. h. wenn aus $x R y . y R z$ immer folgt: $x R z$; andernfalls „nicht-transitiv", und zwar „intransitiv" ($R \in \mathsf{intr}$), wenn R^2 und R einander ausschließen. R heißt „aliotransitiv", wenn R in jedem echten (d. h. nicht identisch-zusammenfallenden) R^2-Paare gilt: $R^2 \dot{-} \mathrm{I} \dot{\subset} R$.

D 16·031. $\mathsf{trans} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\,(R^2 \dot{\subset} R)$

D 16·032. $\mathrm{intr} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\,(R^2 \subset \dot{-}\, R)$

L 16·5. $\vdash . \mathrm{Cnv}``\mathrm{trans} \subset \mathrm{trans}$ (Die Konversen transitiver Relationen sind auch transitiv.)

Pfeilfigur: Stößt in der Figur einer transitiven Relation ein Pfeil mit dem Ende an den Anfang eines anderen, so geht auch ein Pfeil vom Anfang des ersten zum Ende des zweiten.

Beispiele: **Va** ist intransitiv, da der Großvater niemals der Vater ist: $\vdash . \mathbf{Va}^2 \subset \dot{-}\, \mathbf{Va}$. **Bru** ist nicht transitiv, sondern nur aliotransitiv: $\vdash . \mathbf{Bru}^2 \dot{-}\, \mathrm{I} \subset \mathbf{Bru}$; denn ein Bruder eines Bruders von x ist entweder ein Bruder von x oder aber x selbst.

16 c. R heißt „reflexiv" ($R \in \mathrm{refl}$), wenn jedes R-Glied zu sich selbst die Relation R hat, wenn also $R^0 \subset R$; andernfalls „nichtreflexiv", und zwar „irreflexiv" ($R \in \mathrm{irr}$), wenn R^0 und R einander ausschließen, also $R \subset \mathrm{J}$. Hat jedes Element des Typus der R-Glieder die Relation R zu sich selbst, so heißt R „totalreflexiv" ($R \in \mathrm{reflex}$).

D 16·041. $\mathrm{refl} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\,(R^0 \subset R)$

D 16·042. $\mathrm{reflex} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\,(\mathrm{I} \subset R)$

D 16·043. $\mathrm{irr} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\,(R \subset \mathrm{J})$

In der Pfeilfigur einer reflexiven Relation hat jeder Punkt einen Rückkehrpfeil. Dasselbe gilt für eine totalreflexive Relation; bei dieser überdeckt außerdem die Figur das ganze Gebiet des Typus. Die Figur einer irreflexiven Relation hat keine Rückkehrpfeile.

Matrix: Bei einer reflexiven Relation ist die ganze Hauptdiagonale besetzt, bei einer irreflexiven unbesetzt.

Die ersten beiden Lehrsätze geben in der Gestalt von Äquivalenzen Kriterien für Reflexivität und Totalreflexivität an:

L 16·61. $\vdash :. R \in \mathrm{refl} . \equiv . R^0 \subset R . \equiv : (x) : x \in C`R . \supset . x R x$

L 16·62. $\vdash : R \in \mathrm{reflex} . \equiv . R \in \mathrm{refl} . C`R = \mathrm{V} . \equiv . \mathrm{I} \subset R . \equiv . (x) . x R x$

L 16·63. $\vdash . \mathrm{trans} \cap \mathrm{sym} \subset \mathrm{refl}$

L 16·64. $\vdash : R \in \mathrm{as} . \supset . R^2 \in \mathrm{irr}$

Eine asymmetrische Relation ist stets irreflexiv; liegt Transitivität vor, so gilt auch das Umgekehrte:

L 16·65. $\vdash$. as $\subset$ irr

L 16·66. $\vdash$. trans $\cap$ as $=$ trans $\cap$ irr

Beispiele: $\vdash$. **Va** $\in$ as, also $\vdash$. **Va** $\in$ irr und $\vdash$. **Va**^{2} $\in$ irr: niemand ist Vater oder Großvater von sich selbst. $\vdash$. **Bru** $\in$ irr, aber $\vdash$. **Bru**^{2} $\in$ $-$ refl $-$ irr.

Anwendung: Teil II, 41 (teilweise), 42 (teilweise).

17. Operationen

17 a. Eine „Verknüpfung" (z. B. $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$; $R \dot{\cap} S$, $R \dot{\cup} S$, $R|S$; $a \upharpoonleft R$, $R \upharpoonright \beta$, $R \upharpoonright \alpha$; $x + y$, x/y) ist eine kennzeichnende Funktion (**14**) mit zwei Argumenten. Eine solche Verknüpfung, z. B. $\alpha \cap \beta$, wollen wir nun auch auffassen als entstanden durch Anwendung der „Operation" $\alpha \cap$ aus β oder der Operation $\cap \beta$ aus α (z. B. entsteht $3 + 4$ durch die Operation $3 +$ aus 4 oder durch die Operation $+ 4$ aus 3). Diese Bedeutung der Operationen $\alpha \cap$ und $\cap \beta$ ergibt sich, wenn wir in folgender Weise definieren: $\alpha \cap$ ist die Relation zwischen $\alpha \cap \beta$ und β (denn dann ist $\alpha \cap \beta$ dasselbe wie $\alpha \cap {}^{\backprime}\beta$, „das $\alpha \cap$ von β"); $\cap \beta$ ist die Relation zwischen $\alpha \cap \beta$ und α (dann ist $\alpha \cap \beta = \cap \beta {}^{\backprime} \alpha$). Um die Definitionen nicht für jede der genannten Verknüpfungen neu aufstellen zu müssen, drücken wir sie mit Hilfe des allgemeinen Verknüpfungszeichens $\dotplus$ aus, das die genannten Verknüpfungszeichen $\cap$, $\cup$, $\dot{\cap}$ .... vertritt.

D 17·01. $x \dotplus =_{Df} \hat{u}\hat{y}\,(u = x \dotplus y)$

D 17·02. $\dotplus y =_{Df} \hat{u}\hat{x}\,(u = x \dotplus y)$

Der Sinn dieser Definitionen wird deutlicher durch die aus ihnen folgenden Äquivalenzen:

L 17·11. $\vdash : u\,(x \dotplus)\,y \,.\equiv .\, u = x \dotplus y$

L 17·12. $\vdash : u\,(\dotplus y)\,x \,.\equiv .\, u = x \dotplus y$

L 17·13. $\vdash .\, x \dotplus {}^{\backprime} y = \dotplus y {}^{\backprime} x = x \dotplus y$

17 b. Die Operationen sind besonders nützlich zur Bildung von Klassenkennzeichnungen. Ist $\varkappa$ eine Klasse zweiter Stufe, deren Elemente die Klassen α, β, γ .... sind, so bezeichnet $\zeta \cap {}^{\backprime\backprime}\varkappa$ die Klasse, deren Elemente $\zeta \cap \alpha$, $\zeta \cap \beta$, ... sind; und $\cap \zeta {}^{\backprime\backprime}\varkappa$ die Klasse, deren Elemente $\alpha \cap \zeta$, $\beta \cap \zeta$, ... sind. In diesem Falle sind (wegen der Kommutativität von $\cap$) die beideü Ausdrücke

gleichbedeutend. Anders bei der nicht-kommutativen Verknüpfung der Verkettung. Ist λ eine Klasse von Relationen ($P, Q, R, \ldots$), so ist $|Z``\lambda$ die Klasse der Relationen $P|Z$, $Q|Z$, $R|Z, \ldots$; dagegen $Z|``\lambda$ die im allgemeinen davon verschiedene Klasse der Relationen $Z|P$, $Z|Q$, $Z|R, \ldots$ Allgemein:

L 17·21. $\vdash : u \in x \dotplus ``\alpha . \equiv . (\exists y) . y \in \alpha . u = x \dotplus y$

L 17·22. $\vdash : u \in \dotplus y``\alpha . \equiv . (\exists x) . x \in \alpha . u = x \dotplus y$

Die folgenden Definitionen und Lehrsätze werden seltener angewandt.

Um einen Ausdruck von der Form $|Z``\lambda$ als kennzeichnende Funktion von Z darstellen zu können, definieren wir:

D 17·03. $\alpha \underset{''}{\dotplus} y =_{\mathrm{Df}} \dotplus y``\alpha$

Dann gilt:

L 17·31. $\vdash . \alpha \underset{''}{\dotplus} y = \hat{u}\{(\exists x) . x \in \alpha . u = x \dotplus y\}$

Von dieser neuen Verknüpfung $\underset{''}{\dotplus}$ können wir wiederum Operationen bilden:

L 17·32. $\vdash . \alpha \underset{''}{\dotplus}`y = \underset{''}{\dotplus} y`\alpha = \alpha \underset{''}{\dotplus} y$ (analog L 17·13)

Für $|Z``\lambda$ können wir demnach schreiben: $\lambda \underset{''}{|} Z$ oder $\underset{''}{|} Z`\lambda$ oder $\lambda \underset{''}{|}`Z$. Der letzte Ausdruck ist die gewünschte kennzeichnende Funktion des Argumentes Z. Mit ihrer Hilfe können wir, wenn μ die Klasse der Relationen $Z_1, Z_2, \ldots$ ist, die Klasse von Klassen $\varkappa = \lambda \underset{''}{|}``\mu$ bilden. Ein Element von $\varkappa$ besteht aus $P|Z_1$, $Q|Z_1$, $R|Z_1, \ldots$; ein anderes aus $P|Z_2$, $Q|Z_2$, $R|Z_2, \ldots$; usw. Also besteht $\mathsf{s}`\varkappa = \mathsf{s}`(\lambda \underset{''}{|}``\mu)$ aus allen solchen Verkettungen, deren erste Relation zu λ und deren zweite Relation zu μ gehört (s. L 17·34).

L 17·33. $\vdash . \alpha \underset{''}{\dotplus}``\beta = \hat{\gamma}\{(\exists y) . y \in \beta . \gamma = \alpha \underset{''}{\dotplus} y\} = \hat{\gamma}\{(\exists y) . y \in \beta . \gamma = \dotplus y``\alpha\}$

L 17·34. $\vdash . \mathsf{s}`(\alpha \underset{''}{\dotplus}``\beta) = \hat{z}\{(\exists x, y) . x \in \alpha . y \in \beta . z = x \dotplus y\}$

Beispiele. $x + \frac{1}{2}$ kann als kennzeichnende Funktion von x so dargestellt werden: $+\frac{1}{2}`x$ (die „Operation" $+\frac{1}{2}$ angewandt auf x). $+\frac{1}{2}``$**ganz** bezeichnet danach die Klasse von Zahlen von der Form $n + \frac{1}{2}$, wo $n$ ganze Zahl; das ist gleichbedeutend mit $\frac{1}{2} + ``$**ganz**, weil $+$ kommutativ ist, und nach D 17·03 gleichbedeutend mit **ganz** $\underset{''}{+} \frac{1}{2}$. Setzen wir an Stelle von $\frac{1}{2}$ die Variable x, so erhalten

wir $\mathsf{ganz} \mathop{+}\limits_{''} x$ oder als kennzeichnende Funktion von x: $\mathsf{ganz} \mathop{+}\limits_{''} {}^{\backprime}x$; das ist die Klasse der Zahlen, die aus den ganzen Zahlen durch die Operation $+ x$ gebildet werden.

Der Quotient von x durch y ist eine nicht-kommutative Verknüpfung. Er sei bezeichnet mit x/y. Zunächst gilt $\vdash . (x, y) . x/y = x/{}^{\backprime}y = /y{}^{\backprime}x$. Dabei ist in $x/{}^{\backprime}y$ x fest zu denken und y ist hier das Argument der kennzeichnenden Funktion, in $/y{}^{\backprime}x$ umgekehrt. Zum Beispiel bezeichnet $/3{}^{\backprime}x$ „das Drittel von x“, $1/{}^{\backprime}x$ „das Reziproke von x“. Daraus die Klassenkennzeichnungen: $/3{}^{\backprime\backprime}\mathsf{ganz}$ „die Drittel der ganzen Zahlen“, $1/{}^{\backprime\backprime}\mathsf{ganz}$ „die Reziproken der ganzen Zahlen“. Haben wir in $/3{}^{\backprime\backprime}\mathsf{ganz}$ an Stelle von 3 eine Variable und wollen wir die Klasse der ganzen Zahlen, geteilt durch x, als kennzeichnende Funktion von x darstellen, so schreiben wir anstatt $/x{}^{\backprime\backprime}\mathsf{ganz}$ oder $\mathsf{ganz}/_{''} x$: $\mathsf{ganz}/_{''}{}^{\backprime}x$. Handelt es sich nicht nur um éine Zahl x, sondern um die Klasse α von solchen, durch die jeweils alle ganzen Zahlen dividiert werden sollen, so erhalten wir die Klasse von Klassen $\mathsf{ganz}/_{''}{}^{\backprime\backprime}\alpha$.

18. Drei- und mehrstellige Relationen

18 a. Hat eine Aussagefunktion $\varphi\, u\, v \,..\, z$ zwei, drei, ... Argumente, so ist ihre Extension $\hat{u}\,\hat{v}\,..\,\hat{z}\,(\varphi\, u\, v \,..\, z)$ eine zweistellige, dreistellige, ... Relation. Bisher haben wir nur die zweistelligen Relationen behandelt, die weniger wichtigen mehrstelligen seien hier kurz erörtert. Als Variable, deren Werte mehrstellige Relationen sind, verwenden wir: L, M, N.

Ist $M = \hat{x}\,\hat{y}\,\hat{z}\,..\,(\varphi\, x\, y\, z\,..)$ und gilt $\varphi\, \mathsf{a}\, \mathsf{b}\, \mathsf{c}\,..$, so schreiben wir: $M\,(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, ..)$ oder auch $\mathsf{a}\, M\,(\mathsf{b}, \mathsf{c}, ..)$. Wir wollen von jetzt ab der Kürze halber die Symbolik für dreistellige Relationen angeben, für höhere Stellenzahlen ist sie genau analog.

Die zweite Schreibweise ($\mathsf{a}M(\mathsf{b}, \mathsf{c})$) wird besonders bei Relationen angewendet, die (in bezug auf das erste Argument) eindeutig sind; gilt $(x) : M\,(x, \mathsf{b}, \mathsf{c},) . \supset . x = \mathsf{a}$, so verwenden wir die Symbolik der Kennzeichnung (analog $\mathsf{a} = R{}^{\backprime}\mathsf{b}$, **14 a**): $\mathsf{a} = M{}^{\backprime}(\mathsf{b}, \mathsf{c})$.

D 18·01. $\hat{x}\,\hat{y}\,\hat{z}\,(\varphi\, x\, y\, z)\,(u, v, w) . =_{\mathrm{Df}} . \varphi\, u\, v\, w$

(entsprechend für 4 und mehr Argumente). Diese Definition entspricht D 11·01.

„$M \in \mathsf{rel}_3$“ soll heißen: M ist eine dreistellige Relation; entsprechend rel_4 usw.

D 18·021. $x\, M\,(y, z) . =_{\mathrm{Df}} . M\,(x, y, z)$

D 18·022. $M{}^{\backprime}(y, z) =_{\mathrm{Df}} (\iota\, x)\,\{M\,(x, y, z)\}$

D 18·023. $\overrightarrow{M}$'$(y, z) =_{Df} \hat{x} \{M(x, y, z)\}$

Die Beziehung $M \subset N$ und die Verknüpfungen $M \cap N$, $M \cup N$, $\dot{-} M$, $M \dot{-} N$ sind analog den Definitionen in **12 a** zu definieren. (Genau genommen müßten wir anstatt der alten Zeichen $\subset$, $\cap$, $\cup$, $\dot{-}$, hier neue einführen; der Einfachheit halber wollen wir jedoch die alten Zeichen verwenden; da sie hier genau die gleichen formalen Eigenschaften haben, kann aus dieser Neudefinition schon vorhandener Zeichen kein Schaden entstehen; Analoges gilt für $\overrightarrow{M}$ und C'M).

18 b. Analog den Begriffen des Vor- und des Nachbereiches (D, Q) haben wir hier einen ersten, zweiten und dritten Bereich zu unterscheiden: D_1'M, D_2'M, D_3'M; das Feld C'M ist ihre Vereinigung.

D 18·031. D_1'$M =_{Df} \hat{x} \{(\exists y, z) . M(x, y, z)\}$; entsprechend für D_2'M, D_3'M.

D 18·032. C'$M =_{Df} D_1$'$M \cup D_2$'$M \cup D_3$'M

18 c. ^1M bezeichnet die zweistellige Relation zwischen einem Wert des zweiten und einem des dritten Argumentes, für die es einen des ersten gibt; entsprechend ^2M, ^3M.

^1M_a bezeichnet die zweistellige Relation, die aus M durch Einsetzung von a in die erste Argumentstelle entsteht; entsprechend ^2M_a, ^3M_a.

D 18·041. $^1M =_{Df} \hat{y} \hat{z} \{(\exists x) . M(x, y, z)\}$; entsprechend für ^2M, ^3M.

D 18·042. $^1M_u =_{Df} \hat{x} \hat{y} \{M(u, y, z)\}$; entsprechend für ^2M_u, ^3M_u.

18 d. Während es bei einer zweistelligen Relation nur éine Umkehrung in ihre Konverse gibt, gibt es bei einer n-stelligen Relation $n! - 1$ Vertauschungen der Reihenfolge der Argumentstellen; aus der dreistelligen Relation M entstehen dadurch die 5 neuen dreistelligen Relationen, die „Diversen" von M: M^{132}, M^{213}. M^{231}, M^{312}, M^{321}. Die Klasse der Diversen von M, einschließlich M selbst, wird bezeichnet mit Div'M.

D 18·051. $M^{132} =_{Df} \hat{x} \hat{z} \hat{y} \{M(x\, y\, z)\}$

D 18·052. $M^{213} =_{Df} \hat{y} \hat{x} \hat{z} \{M(x\, y\, z)\}$; entsprechend für M^{231}, M^{312}, M^{321}.

Beispiele. **Gb** (x, y, z) bedeute: „x gibt dem y das z". D_1'**Gb**: die Gebenden; D_2'**Gb**: die Empfangenden; D_3'**Gb**: die gegebenen

Dinge. $\mathbf{b}\,{}^1\mathbf{Gb}\,\mathbf{c}$: **b** bekommt das **c**; $\mathbf{a}\,{}^2\mathbf{Gb}\,\mathbf{c}$: **a** gibt das **c**; $\mathbf{a}\,{}^3\mathbf{Gb}\,\mathbf{b}$: **a** gibt dem **b** etwas. Daraus: $\overrightarrow{{}^1\mathbf{Gb}}{}^{\backprime}\mathbf{c}$: die Empfänger des **c**; $\overleftarrow{{}^1\mathbf{Gb}}{}^{\backprime}\mathbf{b}$: die Dinge, die **b** bekommt; $\overrightarrow{{}^2\mathbf{Gb}}{}^{\backprime}\mathbf{c}$: die Geber des **c**; $\overleftarrow{{}^2\mathbf{Gb}}{}^{\backprime}\mathbf{a}$: die Gaben des **a**; $\overrightarrow{{}^3\mathbf{Gb}}{}^{\backprime}\mathbf{b}$: die, die dem **b** etwas geben; $\overleftarrow{{}^3\mathbf{Gb}}{}^{\backprime}\mathbf{a}$: die, denen **a** etwas gibt. $\overrightarrow{{}^1\mathbf{Gb}_\mathbf{a}}{}^{\backprime}\mathbf{c}$ (= $\overleftarrow{{}^3\mathbf{Gb}_\mathbf{c}}{}^{\backprime}\mathbf{a}$): die, denen **a** das **c** gibt; $\overrightarrow{{}^2\mathbf{Gb}_\mathbf{b}}{}^{\backprime}\mathbf{c}$ (= $\overrightarrow{{}^3\mathbf{Gb}_\mathbf{c}}{}^{\backprime}\mathbf{b}$ = $\overrightarrow{\mathbf{Gb}}{}^{\backprime}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$): die, die dem **b** das **c** geben; $\overleftarrow{{}^1\mathbf{Gb}_\mathbf{a}}{}^{\backprime}\mathbf{b}$ (= $\overleftarrow{{}^2\mathbf{Gb}_\mathbf{b}}{}^{\backprime}\mathbf{a}$): die Dinge, die **a** dem **b** gibt.

Anwendung: Teil II, **41**.

19. Die Klassen 0, 1, 2; Eindeutigkeit

19 a. Klassen, die nur éin Element haben, bezeichnen wir als „Einer-Klassen". Da eine Klasse sich nicht selbst angehören kann (**9**), so muß die Klasse, deren einziges Element x ist, deutlich unterschieden werden von x selbst; wir bezeichnen sie mit $\iota{}^{\backprime}x$ oder mit $[x]$.

D 19·011. $\iota{}^{\backprime}x = [x] =_{\mathrm{Df}} \hat{y}\,(y = x)$

Danach ist zu bezeichnen: die aus α durch Hinzufügung von x entstehende Klasse mit $\alpha \cup [x]$, das einzige Element der Einerklasse β mit $\breve{\iota}{}^{\backprime}\beta$.

Die aus x und y bestehende Klasse bezeichnen wir mit $[x, y]$, aus x, y, z bestehende mit $[x, y, z]$, usf.:

D 19·012. $[x, y] =_{\mathrm{Df}} [x] \cup [y]$, usf.

Klassen von der Art $[x, y]$, wobei $x \neq y$, bezeichnen wir als „ungeordnete Paare"; die beiden Elemente sind hier einander völlig gleichgestellt. Im Unterschied dazu heißt die Relation, die nur zwischen x und y besteht, das „geordnete Paar" x, y; sie wird bezeichnet mit $x \downarrow y$:

D 19·02. $x \downarrow y =_{\mathrm{Df}} [x] \uparrow [y]$

Beispiele. $[x]$ dient häufig zur Hinzufügung (oder Wegnahme) eines Elementes zu einer Klasse. **a** sei eine Person; $\mathbf{berl} \cup [\mathbf{a}]$: die Berliner und dazu **a**, falls er nicht schon Berliner ist; $\mathbf{berl} - [\mathbf{a}]$: die Berliner ohne **a**, falls er Berliner ist.

19 b. Die Klasse, deren einziges Element die leere Klasse ist, bezeichnen wir mit $\mathsf{0}$; die Klasse der Einerklassen mit $\mathsf{1}$; die Klasse der ungeordneten Paare mit $\mathsf{2}$. Später werden wir sehen, daß diese Klassen $\mathsf{0}$, $\mathsf{1}$, $\mathsf{2}$ Kardinalzahlen sind (**21 b**).

D 19·031. $0 =_{Df} [\Lambda]$

D 19·032. $1 =_{Df} \hat{a} \{(\exists x) . a = [x]\}$

D 19·033. $2 =_{Df} \hat{a} \{(\exists x, y) . x \neq y . a = [x, y]\}$

L 19·11. $\vdash :: a \in 1 . \equiv :. \exists ! a :. (x, y) : x, y \in a . \supset . x = y$

L 19·12. $\vdash . [x] \in 1$

L 19·13. $\vdash : x \in a . \equiv . [x] \subset a$

L 19·14. $\vdash : [x, y] \in 2 . \equiv . x \neq y$

19 c. Eine Relation R heißt „einmehrdeutig“, wenn zu jedem Hinterglied nur éin Vorderglied in der Relation R steht; „mehreindeutig“, wenn jedes Vorderglied nur zu éinem Hinterglied in der Relation R steht; „eineindeutig“, wenn sie zugleich einmehrdeutig und mehreindeutig ist. Die Klassen der einmehrdeutigen, mehreindeutigen, eineindeutigen Relationen werden bezeichnet mit: $1 \rightarrow \mathrm{cls}$, $\mathrm{cls} \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 1$:

D 19·041. $1 \rightarrow \mathrm{cls} =_{Df} \hat{R} \{(x, y, z) : x R z . y R z . \supset . x = y\}$

D 19·042. $\mathrm{cls} \rightarrow 1 =_{Df} \hat{R} \{(x, y, z) : x R y . x R z . \supset . y = z\}$

D 19·043. $1 \rightarrow 1 =_{Df} (1 \rightarrow \mathrm{cls}) \cap (\mathrm{cls} \rightarrow 1)$

(An Stelle dieser drei Definitionen könnten wir eine einzige, allgemeinere setzen:

D 19·040. $a \rightarrow \beta =_{Df} \hat{R} (\overrightarrow{R} \text{“} \mathrm{C}\text{‘}R \subset a . \overleftarrow{R} \text{“} \mathrm{D}\text{‘}R \subset \beta)$;

dann gilt: L 19·20. $\vdash :: R \in a \rightarrow \beta . \equiv :. (y) : y \in \mathrm{C}\text{‘}R . \supset . \overrightarrow{R} \text{‘} y \in a$ $:. (x) : x \in \mathrm{D}\text{‘}R . \supset . \overleftarrow{R} \text{‘} x \in \beta$. Hieraus folgt die angegebene Bedeutung der obigen Zeichen ($1 \rightarrow \mathrm{cls}$ usw.); es können aber auch anstatt 1 andere Kardinalzahlen oder sogar irgendwelche Klassen vorkommen.)

Pfeilfigur: Bei einer einmehrdeutigen Relation geht von jedem Punkt nur éin Pfeil aus, bei einer mehreindeutigen zu jedem Punkt nur éin Pfeil hin. Matrix: Bei einer einmehrdeutigen Relation hat jede Kolonne, bei einer mehreindeutigen jede Zeile nur éine besetzte Stelle; bei einer eineindeutigen jede Kolonne und jede Zeile.

L 19·21. $\vdash :. R \in 1 \rightarrow \mathrm{cls} . \equiv : (y) : y \in \mathrm{C}\text{‘}R . \equiv . E ! R\text{‘}y$

Auf dieser letzten Eigenschaft beruht die besondere Wich-

tigkeit der einmehrdeutigen Relationen; diese Relationen (und nur sie) können für kennzeichnende Funktionen verwendet werden (**14 a**):

L 19·22. $\vdash :. R \in 1 \rightarrow \mathsf{cls} . \equiv : (x, y) : x R y . \equiv . x = R' y$

So sind auch die bisher schon hierfür verwendeten Relationen einmehrdeutig: D, Q, C, $\overrightarrow{R}$, p, s und die folgenden, die sogar eineindeutig sind: Cl, Rl, Cnv, Sg, Gs, I, ι; ferner auch die Operationen $x \dotplus$ und $\dotplus x$ (**17 a**), also z. B. $R \restriction$, $\alpha \cap$, $\cup \beta$, $| R$ usw.

Die Konversen der einmehrdeutigen Relationen sind mehreindeutig und umgekehrt; die Konverse einer eineindeutigen ist auch eineindeutig:

L 19·23. $\vdash . \mathsf{Cnv}``(1 \rightarrow \mathsf{cls}) = \mathsf{cls} \rightarrow 1$

L 19·24. $\vdash . \mathsf{Cnv}``(1 \rightarrow 1) = 1 \rightarrow 1$

Die eineindeutigen Relationen sind besonders wichtig als Korrelatoren gleichmächtiger Klassen (**21 a**) und isomorpher Relationen (**22 b**), und damit zur Ableitung der Begriffe der Kardinalzahlen und der Relationszahlen.

Die Teilrelationen einer einmehrdeutigen Relation sind einmehrdeutig:

L 19·31. $\vdash . \mathsf{Rl}``(1 \rightarrow \mathsf{cls}) \subset 1 \rightarrow \mathsf{cls}$;

Entsprechendes gilt für $\mathsf{cls} \rightarrow 1$ und $1 \rightarrow 1$.

Die Verkettung einmehrdeutiger Relationen ist einmehrdeutig:

L 19·32. $\vdash : R, S \in 1 \rightarrow \mathsf{cls} . \supset . R | S \in 1 \rightarrow \mathsf{cls}$;

Entsprechendes gilt für $\mathsf{cls} \rightarrow 1$ und $1 \rightarrow 1$.

Beispiele. **Va** ist einmehrdeutig; **Elt** ist zweimehrdeutig (**Elt** $\in 2 \rightarrow \mathsf{cls}$), ebenso **Va** | **Elt** (Großvater); $\breve{\mathbf{Elt}}^2$ (Enkel) ist mehrvierdeutig ($\breve{\mathbf{Elt}}^2 \in \mathsf{cls} \rightarrow 4$). **Quadr** ist einmehrdeutig; dagegen ist $\breve{\mathbf{Quadr}}$ (Quadratwurzel) nicht einmehrdeutig, sondern zweimehrdeutig, und dazu mehreindeutig, also zweieindeutig ($\breve{\mathbf{Quadr}} \in 2 \rightarrow 1$); **Quadr** $\restriction$ **pos** (Quadrat einer positiven Zahl) ist auch mehreindeutig, also eineindeutig; entsprechend ist **pos** $\upharpoonleft$ $\breve{\mathbf{Quadr}}$ (positive Quadratwurzel) auch mehreindeutig, also eineindeutig. Ferner ist **Sin** einmehrdeutig, $\breve{\mathbf{Sin}}$ (*arc sin*) dagegen nicht. Daher können wir die kennzeichnende Funktion **Sin**'y bilden, von $\breve{\mathbf{Sin}}$ dagegen nur $\overleftarrow{\mathbf{Sin}}$'$x$ (die Klasse der Werte von *arc sin* x). Die mathematische Gleichung

„$x = sin\ y$“ hat demnach auch logistisch die Form einer Gleichung (Identität): $x = \mathsf{Sin}`y$. Für „$y = arc\ sin\ x$“ kann aber keine Identität gesetzt werden, sondern: $y \in \overleftarrow{\mathsf{Sin}}`x$; die übliche mathematische Schreibweise (als Gleichung) ist hier nicht logisch einwandfrei; das zeigt sich auch darin, daß aus „$y = arc\ sin\ x$“ und „$z = arc\ sin\ x$“ nicht folgt: „$y = z$“.

Anwendung: Teil II, **34**, **42**, **43**.

20. Das Abstraktionsprinzip

20 a. Die Relationen, die die annähernde Gleichheit (einschließlich der vollständigen Gleichheit) in irgend einer bestimmten Hinsicht bedeuten (z. B. „nahezu gleichlang“, „annähernd gleichfarbig“ usw.) sind symmetrisch und reflexiv. Relationen, die diese formalen Eigenschaften haben, nennen wir „Ähnlichkeiten“ (sim, von *similitas*).

Die Relationen, die vollständige Gleichheit in irgend einer Hinsicht bedeuten (z. B. Gleichfarbigkeit, Gleichaltrigkeit), sind transitiv und symmetrisch. Relationen mit diesen formalen Eigenschaften nennen wir „Gleichheiten“ (aeq, von *aequalitas*). Diejenigen Gleichheiten, die nicht nur reflexiv, sondern totalreflexiv sind (**16 c**), heißen „Totalgleichheiten“ (aeqt).

D 20·01. $\mathsf{sim} =_{\mathsf{Df}} \mathsf{sym} \cap \mathsf{refl}$

D 20·02. $\mathsf{aeq} =_{\mathsf{Df}} \mathsf{trans} \cap \mathsf{sym}$

D 20·03. $\mathsf{aeqt} =_{\mathsf{Df}} \mathsf{aeq} \cap \mathsf{reflex}$

Die Gleichheiten sind (nach L 16·63) auch reflexiv, also auch Ähnlichkeiten:

L 20·11. $\vdash . \mathsf{aeq} \subset \mathsf{refl}$

L 20·12. $\vdash . \mathsf{aeq} \subset \mathsf{sim}$

20 b. Ist R eine Ähnlichkeit, so heißt eine Klasse α ein „Ähnlichkeitskreis“ in bezug auf R, wenn jedes Paar in α ein R-Paar ist und kein Element außerhalb α zu allen in α in der Relation R steht. Die Ähnlichkeitskreise in bezug auf R werden bezeichnet mit $\mathsf{Sim}`R$.

Die Ähnlichkeitskreise einer Gleichheit heißen „Gleichheitskreise“ oder „Abstraktionsklassen“ ($\mathsf{Aeq}`R$). Die Abstraktionsklassen etwa der Gleichfarbigkeit sind die Klassen von Dingen gleicher Farbe. Sind uns nicht die Farben gegeben, sondern nur

die Relation Gleichfarbigkeit, so können wir die Farben darstellen durch diese Abstraktionsklassen („Abstraktionsprinzip“), da jeder Farbe eine solche Klasse entspricht. Wir wenden das Abstraktionsprinzip auch an, d. h. wir bilden die Abstraktionsklassen auch dann, wenn R eine beliebige transitive, symmetrische Relation ist, auch wenn wir noch keine Eigenschaft kennen, deren Übereinstimmung durch R ausgedrückt wird; der Begriff dieses „Übereinstimmenden“ wird dann hierdurch erst gebildet und durch die Abstraktionsklassen in bezug auf R dargestellt.

D 20·04. $\mathrm{Sim}'R =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha}\{\alpha\uparrow\alpha \Subset R :. (x) : \alpha \subset \overrightarrow{R}'x . \supset . x \in \alpha\}$

D 20·05. $\mathrm{Aeq} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Sim} \upharpoonright \mathrm{aeq}$

L 20·2. $\vdash : \varkappa = \mathrm{Aeq}'R . \equiv . \varkappa = \mathrm{Sim}'R . R \in \mathrm{aeq}$

Ist R eine Gleichheit, also transitiv und symmetrisch, so erfüllt, wie man leicht sieht, jede (nicht leere) Klasse von der Form $\overrightarrow{R}'x$ die genannten Bedingungen der Ähnlichkeitskreise. Die Abstraktionsklassen der Gleichheit R sind daher $\mathrm{D}'\overrightarrow{R} - [\Lambda]$:

L 20·3. $\vdash : R \in \mathrm{aeq} . \supset . \mathrm{Aeq}'R = \mathrm{D}'\overrightarrow{R} - [\Lambda]$

L 20·4. $\vdash : \alpha \in \mathrm{Aeq}'R . x \in \alpha . \equiv . R \in \mathrm{trans} \cap \mathrm{sym} . x \in \mathrm{C}'R . \alpha = \overrightarrow{R}'x.$

Verschiedene Abstraktionsklassen sind einander fremd:

L 20·5. $\vdash . \mathrm{J} \upharpoonright \mathrm{Aeq}'R \Subset \mathrm{Fr}$

Das Feld einer Gleichheit R zerfällt somit in elementfremde, nicht durch R verbundene Teilbereiche („Familien“ **25 c**), in deren jedem R allgemein gilt (d. h. $\alpha\uparrow\alpha \Subset R$, jedes Paar des Bereiches ist ein R-Paar). Daher zerfällt die Pfeilfigur einer Gleichheit R in unverbundene Teilfiguren, deren jede „vollständig“ ist (d. h. zwischen je zwei Punkten der Teilfigur liegt ein Doppelpfeil, jeder Punkt hat einen Rückkehrpfeil).

Literatur. Über das Abstraktionsprinzip: Russell [Pr.] 166; vgl. Frege [Grundl.] 73ff., Couturat [Pr.] 51ff., Weyl [Handb.] 9f. (die „Äquivalenzen“ sind die aeqt). Anwendung des Abstr.-Pr. in der Physik: Carnap, Physikal. Begriffsbildung, S. 18.

Die Methode der Begriffsbildung in Form von Ähnlichkeitskreisen heißt „Quasianalyse“. Näheres hierüber: Carnap [Aufbau] § 71ff. Die Anwendung des Abstr.-Pr. bildet den Spezialfall der Quasianalyse für transitive Relationen ([Aufbau] § 73).

20 c. Auch im Aufbau der Logistik selbst findet das Abstraktionsprinzip wichtige Verwendung. Mit Hilfe des Begriffs der Eineindeutigkeit (**19 c**) werden die Relationen Sm (Gleichmächtigkeit von Klassen, **21 a**) und Smor (Isomorphie von Relationen, **22 b**) eingeführt; diese beiden Relationen sind Gleichheiten. Die Kardinalzahlen ergeben sich dann als die Abstraktionsklassen in bezug auf Sm (**21 b**), die Relationszahlen als die Abstraktionsklassen in bezug auf Smor (**22 c**).

Die Einerklassen sind die Abstraktionsklassen der Identität:

L 20·6. $\vdash . 1 = \mathsf{Aeq}‘I$

21. Die Kardinalzahlen

21 a. Werden durch die Relation R die Elemente von α und die Elemente von β einander eineindeutig zugeordnet, so nennen wir R einen „Korrelator" zwischen α und β; in Zeichen: $R \in \alpha \,\overline{\mathsf{sm}}\, \beta$.

D 21·01. $\alpha \,\overline{\mathsf{sm}}\, \beta =_{\mathsf{Df}} 1 \to 1 \cap \overleftarrow{\mathsf{D}}‘\alpha \cap \overleftarrow{\mathsf{G}}‘\beta$

Haben zwei Klassen einen Korrelator, so ist die Anzahl ihrer Elemente gleich; wir nennen die Klassen dann „gleichmächtig", in Zeichen: $\alpha \,\mathsf{Sm}\, \beta$ (von *similis*; der Ausdruck „ähnlich" wird aber besser vermieden).

D 21·02. $\mathsf{Sm} =_{\mathsf{Df}} \hat{\alpha}\hat{\beta}\,(\exists!\, \alpha \,\overline{\mathsf{sm}}\, \beta)$

L 21·11. $\vdash . \mathsf{Sm} \in \mathsf{aeq}$ Sm ist eine Gleichheit; dadurch wird die Anwendung des Abstraktionsprinzips ermöglicht. Sm ist überdies totalreflexiv, also eine Totalgleichheit:

L 21·12. $\vdash . \mathsf{Sm} \in \mathsf{reflex} . \mathsf{Sm} \in \mathsf{aeqt}$

L 21·13. $\vdash : \alpha \,\mathsf{Sm}\, \gamma . \beta \,\mathsf{Sm}\, \delta . \gamma \subset \beta . \delta \subset \alpha . \supset . \alpha \,\mathsf{Sm}\, \beta$

(kürzer: $\vdash . \mathsf{Sm} | \mathsf{C} \cap \breve{\mathsf{C}} | \mathsf{Sm} \subseteq \mathsf{Sm}$)

Der Schröder-Bernsteinsche Satz: ist α mit einer Teilklasse von β gleichmächtig, und β mit einer Teilklasse von α, so auch α mit β.

21 b. Unter der „Kardinalzahl" oder „Anzahl" (in der Mengenlehre: „Mächtigkeit") einer Klasse α, bezeichnet mit $\mathsf{Nc}‘\alpha$, verstehen wir die Klasse der mit α gleichmächtigen Klassen:

D 21·03. $\mathsf{Nc}‘\alpha =_{\mathsf{Df}} \overrightarrow{\mathsf{Sm}}‘\alpha$

Hat die Klasse α die Kardinalzahl μ, so gilt also $\alpha \in \mu$. Die Vorzüge dieser Definition sind: von den so definierten Kardinalzahlen lassen sich die in der Arithmetik verlangten formalen Eigenschaften beweisen; würden wir sie nicht so (oder ähnlich) definieren, so müßten wir den Begriff der Kardinalzahl einer Klasse als undefinierten Grundbegriff einführen, und würden neue Axiome über seine Eigenschaften benötigen.

Die Klasse der Kardinalzahlen, also $\hat{\mu}\{(\exists\alpha).\mu = \mathrm{Nc}`\alpha\}$ oder $\mathrm{D}`\mathrm{Nc}$ bezeichnen wir mit nc:

D 21·04. $\mathrm{nc} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{D}`\mathrm{Nc}$

Hiernach sind die Kardinalzahlen die Abstraktionsklassen in bezug auf die Gleichmächtigkeit:

L 21·21. $\vdash . \mathrm{nc} = \mathrm{Aeq}`\mathrm{Sm}$

L 21·22. $\vdash . \alpha \in \mathrm{Nc}`\alpha$

L 21·23. $\vdash : \alpha \in \mathrm{Nc}`\beta . \equiv . \beta \in \mathrm{Nc}`\alpha . \equiv . \alpha \,\mathrm{Sm}\, \beta$

L 21·24. $\vdash : \alpha \,\mathrm{Sm}\, \beta . \supset . \mathrm{Nc}`\alpha = \mathrm{Nc}`\beta$

L 21·25. $\vdash : \mu \in \mathrm{nc} . \equiv . (\exists\alpha) . \mu = \mathrm{Nc}`\alpha$

Beispiele. Ist **k** eine Klasse von Personen, **Mu** die Relation Mutter, so gilt: $\vdash . \mathbf{Va}``\mathbf{k}\, \mathrm{Sm}\, \mathbf{Mu}``\mathbf{k}$ oder $\vdash . \mathrm{Nc}`\mathbf{Va}``\mathbf{k} = \mathrm{Nc}`\mathbf{Mu}``\mathbf{k}$.

Literatur. Die genannte Definition der Kardinalzahlen stammt von Frege [Grundl.] 79ff., [Grundg.] I 57; sie ist unabhängig davon von Russell neu aufgestellt worden [Pr.] 114, PM I, [Einf.] 11. Vgl. Weyl [Handb.] 11, Behmann [Math.] 50f. Bedenken gegen diese Definition: Hausdorff [Grundz.] 46. Gegen diese Bedenken: Carnap [Aufbau] § 40; vgl. Fraenkel [Einl.] 58.

Die früher definierten Klassen 0, 1, 2 (**19 b**) ergeben sich jetzt als Kardinalzahlen, da alle leeren Klassen identisch sind, alle Einerklassen untereinander gleichmächtig und alle Paarklassen untereinander gleichmächtig sind. Darin liegt die nachträgliche Rechtfertigung für die Wahl dieser drei Zeichen.

L 21·31. $\vdash . 0 = \mathrm{Nc}`\Lambda$

L 21·32. $\vdash . \exists ! 0$

L 21·33. $\vdash : \mathrm{Nc}`\gamma = 0 . \equiv . \gamma = \Lambda$

L 21·34. $\vdash . 1 = \mathrm{Nc}`[x]$

L 21·35. $\vdash : x \neq y . \supset . 2 = \mathrm{Nc}`[x, y]$

L 21·36. $\vdash . 0, 1, 2 \in \mathrm{nc}$

21 c. Die Addition von Kardinalzahlen kann definiert werden mit Hilfe der Vereinigung fremder Klassen:

D 21.05. $\mu + \nu =_{\mathrm{Df}} \hat{\zeta}\{(\exists \gamma, \delta) . \gamma \in \mu . \delta \in \nu . \gamma \,\mathrm{Fr}\, \delta . \zeta = \gamma \cup \delta\}$

Die Relation „unmittelbarer Vorgänger in der Reihe der Kardinalzahlen" (N) ist dann die Relation zwischen x und $x + 1$, also nach D 17·02 die Relation $\breve{+1}$:

D 21·06. $\mathrm{N} =_{\mathrm{Df}} \breve{+1}$

Alle weiteren arithmetischen Begriffe lassen sich hieraus ableiten; z. B. >, <, Subtraktion, Multiplikation, Division usw. (Darauf kann hier nicht eingegangen werden.) So entsteht die Arithmetik als Zweig der Logistik. Es ist aber zu beachten, daß die Ableitung gewisser Lehrsätze, insbesondere über das Unendliche, zwei weitere Axiome erfordert: das Auswahl- und das Unendlichkeitsaxiom (**24 b, e**).

Literatur. Die Arithmetik als Zweig der Logik: Russell [Einf.] 196ff., Behmann [Math.].

22. Isomorphie. Die Relationszahlen

22 a. Unter dem „S-Bild von Q" ($S ; Q$) verstehen wir die Relation, die zwischen den S-Korrelaten eines Q-Paares besteht, d. h. die Relation, die zwischen u und v dann besteht, wenn es x und y derart gibt, daß $x\,Q\,y$, $u\,S\,x$ und $v\,S\,y$:

D 22·01. $S ; Q =_{\mathrm{Df}} S \,|\, Q \,|\, \breve{S}$

D 22·02. $S \dagger Q =_{\mathrm{Df}} S ; Q$

Die Relation S wird auch als die „Transformation" zwischen Q und dem S-Bild von Q bezeichnet.

Die erste Schreibweise ($S ; Q$) fassen wir als kennzeichnende Funktion des Argumentes Q auf, die zweite ($S \dagger Q$) als kennzeichnende Funktion der beiden Argumente S und Q, also als Verknüpfung, die nach D 17·01 Anlaß gibt zur Bildung der Operation $S\dagger$. ($S ; Q$ steht in Analogie zu $S``\beta$; $S\dagger`Q$ zu $S_{\epsilon}`\beta$). (Der Mathematiker sei hingewiesen auf die Analogie zwischen D 22·01 und der Definition des konjugierten Elementes in der Gruppentheorie: $U' = T^{-1}\,U\,T$).

22 b. Besonders wichtig ist der Fall einer eineindeutigen Transformation des ganzen Feldes von Q: $S \in 1 \rightarrow 1 \,.\, \mathrm{C}`Q = \mathrm{ᗡ}`S$.

Hierbei besteht die Relation $S;Q$, wenn $x\,Q\,y$, zwischen $S'x$ und $S'y$ (Abb. 7).

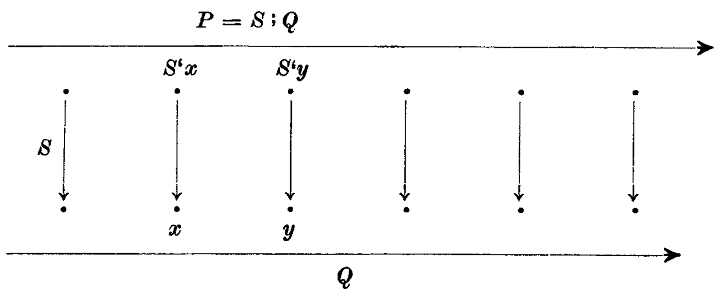


Abb. 7. Isomorphie

S heißt in diesem Falle ein „Korrelator" zwischen $S;Q$ und Q (zum Unterschied von dem Klassenkorrelator (**21a**) auch „Relations-" oder „Isomorphiekorrelator"). Die Klasse der Korrelatoren zwischen P und Q wird bezeichnet mit $P\,\overline{\mathsf{smor}}\,Q$. Gibt es einen solchen Korrelator, so heißen P und Q „isomorph" (oder „ähnlich") zu einander: $P\ \mathsf{Smor}\ Q$ (von *similis ordine*). Die Definitionen von $P\,\overline{\mathsf{smor}}\,Q$ und Smor sind analog denen von $\alpha\,\overline{\mathsf{sm}}\,\beta$ und Sm (D 21·01 und ·02).

D 22·03. $P\,\overline{\mathsf{smor}}\,Q =_{\mathrm{Df}} \hat{S}\{S \in 1 \rightarrow 1 \,.\, \mathsf{C}'Q = \text{ᗡ}'S \,.\, P = S;Q\}$

D 22·04. $\mathsf{Smor} =_{\mathrm{Df}} \hat{P}\,\hat{Q}\,\{\exists!\, P\,\overline{\mathsf{smor}}\,Q\}$

Die Isomorphie ist (wie die Gleichmächtigkeit) totalreflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Totalgleichheit:

L 22·11. $\vdash .\, \mathsf{Smor} \in \mathsf{aeqt}$

Beziehungen zwischen Klassen- und Relationskorrelation:

L 22·12. $\vdash : P\,\mathsf{Smor}\,Q \,.\supset.\, \mathsf{C}'P\ \mathsf{Sm}\ \mathsf{C}'Q$

L 22·13. $\vdash : S \in P\,\overline{\mathsf{smor}}\,Q \,.\equiv.\, S \in (\mathsf{C}'P)\,\overline{\mathsf{sm}}\,(\mathsf{C}'Q) \,.\, P = S;Q$

22 c. Analog der Definition der Kardinalzahlen auf Grund des Abstraktionsprinzips aus Sm (D 21·03 und ·04) definieren wir hier die „Relationszahl" oder „Struktur" einer Relation ($\mathsf{Nr}'P$) als Klasse der zu ihr isomorphen Relationen; die Relationszahlen (nr) sind die Abstraktionsklassen in bezug auf Smor:

D 22·05. $\mathsf{Nr}'P =_{\mathrm{Df}} \overrightarrow{\mathsf{Smor}}'P$

D 22·06. $\mathrm{nr} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{D}`\mathrm{Nr}$

L 22·21. $\vdash . \mathrm{nr} = \mathrm{Aeq}`\mathrm{Smor}$

Die Relationszahlen der Reihen (**27 b**) heißen „Reihenzahlen", die der wohlgeordneten Reihen „Ordinalzahlen" (no, **29 a**). (Im Anschluß an den Cantorschen Terminus „Ordnungstyp" mag man auch sagen: „Relationstyp", „Ordnungstyp", „Wohlordnungstyp").

Die Sätze über Nr und nr sind analog denen über Nc und nc (L 21·21 ff.).

L 22·22. $\vdash . P \in \mathrm{Nr}`P$

L 22·23. $\vdash : P \in \mathrm{Nr}`Q . \equiv . Q \in \mathrm{Nr}`P . \equiv . P \,\mathrm{Smor}\, Q$

L 22·24. $\vdash : P \,\mathrm{Smor}\, Q . \equiv . \mathrm{Nr}`P = \mathrm{Nr}`Q$

L 22·25. $\vdash : \lambda \in \mathrm{nr} . \equiv . (\exists P) . \lambda = \mathrm{Nr}`P$

22 d. Eine Relation wird durch ihre Struktur vollständig charakterisiert in bezug auf ihre formalen Eigenschaften, wenn wir hierunter diejenigen ihrer Eigenschaften verstehen, die sich bei bloßer Berücksichtigung der Identität und Verschiedenheit unter den Relationsgliedern ergeben, unter Nichtbeachtung der sonstigen Beschaffenheit der Glieder. An Stelle des hiermit erläuterten, aber nicht scharf abgegrenzten Begriffs der „formalen Eigenschaften" verwenden wir deshalb lieber den auf das Gleiche zielenden, aber scharf definierbaren Begriff der „strukturellen Eigenschaften" einer Relation *P*. Eine Eigenschaft wird dadurch als strukturelle Eigenschaft charakterisiert, daß sie, wenn sie irgend einer Relation *R* zukommt, auch allen Relationen derselben Struktur zukommt, also allen zu *R* isomorphen Relationen. Oder ausgedrückt für Klassen: α stellt eine strukturelle Eigenschaft dar, wenn jede zu einer Relation von α isomorphe Relation auch zu α gehört:

D 22·07. $\mathrm{struct} =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha}\, (\mathrm{Smor}``\alpha \subset \alpha)$

L 22·31. $\vdash :. \alpha \in \mathrm{struct} . \equiv : (P, Q) : P \in \alpha . P \,\mathrm{Smor}\, Q . \supset . Q \in \alpha$

Manche der bisher erörterten Eigenschaften von Relationen sind strukturell:

L 22·32. $\vdash .$ trans, intr, refl, reflex, irr, sym, as, $1 \rightarrow$ cls, cls $\rightarrow 1$, $1 \rightarrow 1$ $\in$ struct

Die folgenden, später einzuführenden Eigenschaften sind

ebenfalls strukturell: prog (26a), connex (27a), ser (27b), bord, Ω (29a), ded (29b), dicht, dedek (29c), η (29d), ϑ (29e).

Literatur. Die Begriffe der Struktur und der strukturellen Eigenschaften haben eine große Bedeutung in logischer, erkenntnistheoretischer und allgemein-wissenschaftlicher Hinsicht; vgl. Russell [Einf.] 53ff., 61ff., Carnap [Aufbau] § 11ff.

22e. Eine Struktur ist vollständig beschrieben, wenn entweder eine ihrer Relationen angegeben wird, oder aber:

entweder 1. eine Paarliste, in der die Glieder nicht mit Eigennamen bezeichnet sind, sondern mit Variabeln; bei größerer Gliederzahl werden zweckmäßig Nummern verwendet, wobei eine beliebige Umnummerierung gestattet ist;

oder 2. eine Pfeilfigur mit unbenannten Punkten (oder mit nummerierten Punkten, wobei beliebige Umnummerierung gestattet ist);

oder 3. eine Matrix mit unbenannten Zeilen und Kolonnen; hier ist eine beliebige Vertauschung zweier Zeilen bei gleichzeitiger Vertauschung der entsprechenden Kolonnen gestattet.

Die Aufgabe, eine „Strukturcharakteristik" aufzustellen, ist noch nicht in befriedigender Weise gelöst. Diese Aufgabe verlangt, ein Verfahren anzugeben, mit Hilfe dessen man jeder (durch Paarliste, Pfeilfigur oder Matrix) vorgelegten Relation einen bestimmten (etwa aus Zahlen bestehenden) Formelausdruck zuschreiben kann derart, daß zwei Relationen dann und nur dann die gleiche „Charakteristik" erhalten, wenn sie isomorph sind.

Ein die Forderungen erfüllendes, aber wenig elegantes Verfahren ist z. B. das folgende. Jede Matrix kann, wenn an Stelle von u und v 0 und 1 gesetzt und dann die Zeilen aneinandergereiht werden, als dyadische Zahl gelesen werden. Unter den Matrices einer bestimmten Relation (die sich durch verschiedene Reihenfolge der Glieder unterscheiden), gibt es eine, deren dyadische Zahl größer ist als die der andern. Man kann Regeln angeben, um eine vorgegebene Matrix in diese ausgezeichnete umzuformen. Diese maximale dyadische Zahl kann als Strukturcharakteristik genommen werden.

Beispiele. Siehe die Beispiele in **11f**. Wenn eine andere Relation als **G** auch durch die Pfeilfigur 3 dargestellt werden kann, nur mit anderer Benennung der Glieder, so ist sie isomorph zu **G**. Beide Relationen haben dieselbe Struktur; diese kann durch die Abb. 3, unter Weglassung der Namen, dargestellt werden. Die

Matrices Abb. 4 und 6 stellen ebenfalls Strukturen dar, wenn wir die Gliedernamen **a**, **b**, ... weglassen.

Um die Struktur von **H** durch eine Paarliste darzustellen, nehmen wir etwa Nummern als Variable; die Paarliste kann dann z. B. lauten: *11, 12, 21, 23, 43, 52.* Hierbei ist beliebige Substitution erlaubt; setzen wir z. B. für *12345 35124*, so erhalten wir als Darstellung derselben Struktur: *23, 35, 53, 51, 21, 45.*

Die maximale dyadische Zahl ist für **G** ($\mathbf{1_3}$ ist Abkürzung für **111**): $\mathbf{0, 1_4, 0_{11}, 1_2, 0_{11}, 1, 0_{33}, 1_3, 0_{55}}$: für **H**: $\mathbf{1_2, 0_3, 1, 0, 1, 0_8, 1, 0_5, 1, 0_2}$.

Anwendung: Teil II, 37 a.

23. Die R-Ketten; Gruppen

23 a. Kann man von x aus in endlich vielen R-Schritten y erreichen, so sagen wir: zwischen x und y besteht eine „R-Kette". Das ist gleichbedeutend mit dem Bestehen einer endlichen Potenz von R zwischen x und y. Wir unterscheiden die R-Kette erster Art ($x\, R_* \, y$) und die R-Kette zweiter Art ($x\, R_{\text{po}}\, y$), je nachdem die nullte Potenz (die Identität im Felde von R) eingeschlossen ist oder nicht. Es ist also $R_* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup$ usw.; $R_{\text{po}} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup$ usw. Die Schwierigkeit der Definition liegt darin, dieses „usw." oder den Begriff des „Endlichen" auszudrücken. Wir haben ja noch keinen Begriff von endlicher Anzahl, werden ihn vielmehr umgekehrt aus der R-Kette ableiten.

Die Definition gelingt mit Hilfe des Begriffes der „Erblichkeit" für Eigenschaften oder Klassen. Eine Klasse ζ heißt „R-erblich", wenn jeder R-Nachfolger eines Elementes von ζ auch zu ζ gehört, also wenn $\breve{R}``\,\zeta \subset \zeta$. (Beispiel: Die „strukturellen" Eigenschaften [oder Klassen] sind in D 22·07 definiert als die isomorphie-erblichen Eigenschaften [Klassen]). Wir wollen nun überlegen, daß die folgenden beiden Annahmen gleichbedeutend sind: 1. $u(R^0 \cup R \cup R^2 \cup \ldots$ (endlich viele Glieder)) z, also etwa $uRv \,.\, vRw \,.\, \ldots \,.\, y\,R\,z$; 2. z gehört zu jeder R-erblichen Klasse ζ, zu der u gehört. Erstens impliziert (1) (2): denn, wenn ζ erblich ist und u zu ζ gehört, dann auch v, dann auch w, usw., schließlich auch z. Zweitens impliziert (2) (1): wir nehmen für ζ die Klasse der von u aus in endlich vielen R-Schritten erreichbaren Glieder; diese Klasse ist offenbar R-erblich, und u gehört zu ihr, also auch z. Da somit (1) und (2) gleichbedeutend sind, so können wir

(2) zur Definition der R-Kette (erster Art) benutzen; diese sollte ja die (nicht scharf faßbare) Bedeutung (1) haben:

D 23·01. $R_{*} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{y}\{x \in C'R :. (\zeta) : \breve{R}``\zeta \subset \zeta . x \in \zeta . \supset . y \in \zeta\}$

Zur Ersparung von Klammern: D 23·02. $\breve{R}_{*} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Cnv}'R_{*}$

Allgemein: Konversbogen oder Pfeile über R_{*}, R_{po}, R_{ϵ} u. dergl. sollen sich nicht auf R allein beziehen, sondern auf R mit Index.

In manchen Fällen handelt es sich um $\breve{R}$-Erblichkeit:

L 23·11. $\vdash :: x R_{*} y . \equiv :. x \in C'R :. (\zeta) : R``\zeta \subset \zeta . y \in \zeta . \supset . x \in \zeta\}$

Eine ähnliche Überlegung zeigt, daß das Bestehen der R-Kette zweiter Art zwischen x und y gleichbedeutend ist mit der Annahme, daß y zu jeder R-erblichen Klasse gehört, zu der die R-Nachfolger von x ($\overleftarrow{R}'x$) gehören:

D 23·03. $R_{\mathrm{po}} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{y}\{(\zeta) : \breve{R}``\zeta \subset \zeta . \overleftarrow{R}'x \subset \zeta . \supset . y \in \zeta\}$

L 23·12. $\vdash . R^0 \subseteq R_{*} . R \subseteq R_{*} . R^2 \subseteq R_{*}$ (usw.)

L 23·13. $\vdash . R_{*} | R \subseteq R_{*}$

L 23·21. $\vdash . R \subseteq R_{\mathrm{po}} . R^2 \subseteq R_{\mathrm{po}}$ (usw.)

L 23·22. $\vdash . R_{\mathrm{po}} | R \subseteq R_{\mathrm{po}}$

L 23·23. $\vdash . R_{*}, R_{\mathrm{po}} \in \mathrm{trans}$ Die Ketten sind stets transitiv; R_{po} ist häufig eine Reihe (**27 b**), wenn R keine Reihe ist.

L 23·24. $\vdash : R \in \mathrm{trans} . \supset . R_{\mathrm{po}} = R . R_{*} = R \cup R^0$

L 23·25. $\vdash . R_{*} = R^0 \cup R_{\mathrm{po}}$

Literatur. Der Gedanke, den Begriff der Endlichkeit und der vollständigen Induktion zurückzuführen auf den Begriff der Erblichkeit, stammt von Frege [Begriffsschrift] 55ff., [Grundg.] I 59ff.; vgl. PM I 569ff., Russell [Einf.] 20ff.

23 b. Potid'R bezeichnet die Klasse der (endlichen) Potenzen von R, einschließlich der Identität (also R^0, R, R^2, ...); Pot'R dieselbe Klasse ohne R^0. Da $R = |R\,'R^0$ (D 17·02, L 16·41), $R^2 = |R\,'R$, $R^3 = |R\,'R^2$ usw., so lauten die Definitionen (unter Benutzung der Kette der Operation $|\,R$):

D 23·04. $\mathrm{Potid}'R =_{\mathrm{Df}} (\overrightarrow{|\,R})_{*}\,'R^0$

D 23·05. $\mathrm{Pot}'R =_{\mathrm{Df}} (\overrightarrow{|\,R})_{*}\,'R$

L 23·31. $\vdash . \mathrm{Potid}‘R = \mathrm{Pot}‘R \cup [R^0]$

L 23·32. $\vdash . R_* = \dot{\mathrm{s}}‘\mathrm{Potid}‘R$

L 23·33. $\vdash . R_{\mathrm{po}} = \dot{\mathrm{s}}‘\mathrm{Pot}‘R$

Beispiele. Elt^2 bedeutet Großelter, Elt^3 Urgroßelter usw.; $\mathrm{Elt}_{\mathrm{po}}$ Vorfahre. $\breve{\mathrm{Elt}}$ Kind, $\breve{\mathrm{Elt}}^2$ Enkel, $\breve{\mathrm{Elt}}^3$ Urenkel usw.; $\breve{\mathrm{Elt}}_{\mathrm{po}}$ Nachkomme. Elt und $\breve{\mathrm{Elt}}$ sind intransitiv, $\mathrm{Elt}_{\mathrm{po}}$ und $\breve{\mathrm{Elt}}_{\mathrm{po}}$ transitiv.

23 c. Der Begriff der „Gruppe“, der sich zu einem der wichtigsten Begriffe der Mathematik entwickelt hat, kann relationstheoretisch in einfacher Weise dargestellt werden. Eine Klasse von „Elementen“, zwischen denen eine Verknüpfung „Komposition“ besteht, heißt eine „Gruppe“, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. das Ergebnis der Komposition je zweier Elemente der Klasse gehört ebenfalls zu der Klasse („Gruppeneigenschaft“); 2. die Komposition erfüllt das assoziative Gesetz; 3. es gibt ein „Einheitselement“ von der Art, daß die Komposition eines beliebigen Elementes der Klasse mit dem Einheitselement das Element selbst ergibt; 4. zu jedem Element gibt es in der Klasse ein „inverses Element“ derart, daß die Komposition des Elementes mit dem inversen das Einheitselement ergibt. Die logische Analyse des Gruppenbegriffes zeigt, daß man die „Elemente“ einer Gruppe als Relationen und die „Komposition“ als Verkettung auffassen kann. Daher kann man die Definition so formulieren:

D 23·06. $\mathrm{gru} =_{\mathrm{Df}} \hat{\lambda}\{(P, Q) : P, Q \in \lambda . \supset . P \mid Q \in \lambda . \breve{P} \in \lambda :. \mathrm{I} \upharpoonright \mathrm{s}‘\mathrm{C}“\lambda \in \lambda\}$

Als „Einheitselement“ tritt hier die Identität auf ($\mathrm{I} \upharpoonright \mathrm{s}‘\mathrm{C}“\lambda$), als „inverses Element“ von P die Konverse $\breve{P}$. Die Forderung der Assoziativität braucht nicht aufgestellt zu werden, da sie für die Verkettung ohnehin erfüllt ist (L 16·12). Gilt für die Komposition auch das kommutative Gesetz, so heißt die Gruppe eine „Abelsche“:

D 23·07. $\mathrm{abel} =_{\mathrm{Df}} \hat{\lambda}\{\lambda \in \mathrm{gru} :. (P, Q) : P, Q \in \lambda . \supset . P \mid Q = Q \mid P\}$

Die „zyklische Gruppe von P“ besteht aus den Potenzen von P und deren Konversen:

D 23·08. $\mathrm{Zykl}‘P =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Potid}‘P \cup \mathrm{Cnv}“\mathrm{Potid}‘P$

Die „zyklischen Gruppen“ bilden den Vorbereich von Zykl:

D 23·09. $\mathrm{zykl} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{D}`\mathrm{Zykl}$

Anwendung: Teil II, **36 a, 38, 39.**

24. Endlich und Unendlich

24 a. Ist $\varkappa$ eine Klasse von Klassen, so heißt μ eine „Auswahlklasse“ von $\varkappa$, wenn μ mit jeder Klasse, die Element von $\varkappa$ ist, genau éin Element gemein hat. Haben wir eine Relation R, deren Nachbereich $\varkappa$ ist und die jedem Element α von $\varkappa$ ein Element x von α selbst als „Vertreter“ von α zuordnet, so heißt R eine „Auswahlrelation“ oder ein „Selektor“ aus $\varkappa$; $\mathrm{D}`R$ ist dann eine Auswahlklasse von $\varkappa$. Die Klasse der Selektoren von $\varkappa$ wird bezeichnet mit $\in_\Delta`\varkappa$:

L 24·10. $\vdash . \in_\Delta`\varkappa = (1 \rightarrow \mathrm{cls}) \cap \mathrm{Rl}`\in \cap \overleftarrow{\text{Ɑ}}`\varkappa$

Die Klasse der Auswahlklassen von $\varkappa$ ist $\mathrm{D}``\in_\Delta`\varkappa$.

Der Auswahlbegriff wird nun verallgemeinert. $\varkappa$ kann irgend eine Klasse sein; der Vertreter eines Elementes von $\varkappa$ braucht zu diesem Element nicht notwendig in der Relation $\in$ zu stehen, sondern in irgend einer Relation P; R heißt dann ein „P-Selektor“ aus $\varkappa$. Die $\in$-Selektoren sind also die Relationen, die wir kurzweg Selektoren genannt haben. $P_\Delta`\varkappa$ bezeichnet die Klasse der P-Selektoren aus $\varkappa$:

D 24·01. $P_\Delta`\varkappa = (1 \rightarrow \mathrm{cls}) \cap \mathrm{Rl}`P \cap \overleftarrow{\text{Ɑ}}`\varkappa$

Hieraus ergibt sich die genannte Bedeutung von $\in_\Delta`\varkappa$ (L 24·10).

24 b. Das Auswahlaxiom besagt, daß jede Klasse $\varkappa$ von nichtleeren Klassen (mindestens) einen Selektor hat:

$(\varkappa) : \Lambda \sim \in \varkappa . \supset . \exists ! \in_\Delta`\varkappa$

Das Auswahlaxiom soll hier nicht unter die Grundsätze der Logik aufgenommen werden, da seine Zulässigkeit problematisch ist; das hängt mit seinem Charakter als Existenzbehauptung zusammen. Das Axiom ist aber erforderlich zum Beweise gewisser Sätze der Mengenlehre über transfinite Mächtigkeiten (unendliche Kardinalzahlen). Wird das Axiom nicht als Grundsatz aufgestellt, so können diese Sätze nur als Bedingungssätze ausgesprochen werden, als Implikationen, deren Implikans das Auswahlaxiom ist.

Literatur. Die Literatur über die mathematische und logische Diskussion des von Zermelo zuerst aufgestellten Auswahlaxioms ist sehr reichhaltig. Hier müssen wir uns auf folgende Hinweise beschränken: PM I 561ff.; Russell [Einf.] 123ff.; Fraenkel [Grundl.] 80ff., [Einl.] 288 ff. (ausführliche Erörterung und Literaturangaben).

24 c. Auf zwei verschiedene Weisen kann die Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Kardinalzahlen (und Klassen) vorgenommen werden. Zunächst können wir den Begriff des Endlichen erfassen durch die Definition der „induktiven Kardinalzahlen“: das sind diejenigen, die von 0 aus durch endlichmaliges Addieren von 1 erreichbar sind, genauer: die von 0 aus durch eine $\overbrace{+1}$-Kette (oder N-Kette nach D 21·06) erreichbar sind:

D 24·02. $\mathrm{nc\ induct} =_{\mathrm{Df}} \overleftarrow{\mathrm{N}}_{*}`0$

„Induktive Klassen“ sind die, deren Kardinalzahlen induktiv sind:

D 24·03. $\mathrm{cls\ induct} =_{\mathrm{Df}} s`\mathrm{nc\ induct}$

Da die Kette mit Hilfe der erblichen Eigenschaften definiert ist, so sind die induktiven Kardinalzahlen diejenigen, die alle der Null zukommenden erblichen Eigenschaften haben; anders ausgedrückt: auf die die Methode der mathematischen Induktion angewendet werden kann:

L 24·2. $\vdash :: \alpha \in \mathrm{nc\ induct} . \equiv :. (\mu) :. (\xi) : \xi \in \mu . \supset . \xi + 1 \in \mu : 0 \in \mu : \supset . \alpha \in \mu$

24 d. Zweitens können wir den Begriff des Unendlichen erfassen durch die Definition der „reflexiven Klassen“ (nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Reflexivität für Relationen, refl, D 16·041). Eine Klasse heißt „reflexiv“, wenn sie eine echte (d. h. nicht mit ihr selbst identische) Teilklasse hat, die gleichmächtig mit ihr ist:

D 24·04. $\mathrm{cls\ refl} =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha}\{(\exists \beta) . \beta \subset \dot{\wedge} \mathrm{Sm} \dot{\wedge} \mathrm{J}\ \alpha\}$

Die Kardinalzahlen dieser Klassen heißen auch „reflexiv“:

D 24·05. $\mathrm{nc\ refl} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Nc}``\mathrm{cls\ refl}$

Eine reflexive Kardinalzahl ändert sich nicht durch Addition von 1:

L 24·31. $\vdash : \xi \in \mathrm{nc\ refl} . \equiv . \exists ! \xi . \xi = \xi + 1$

Diese Äquivalenz kann auch zur Definition benutzt werden.

Das Verhältnis der beiden genannten Einteilungen der Klassen (und zugleich der Kardinalzahlen) in endliche und unendliche ist folgendes: Induktivität und Reflexivität schließen einander aus:

L 24·32. $\vdash$. nc induct Fr nc refl

L 24·33. $\vdash$. cls induct Fr cls refl

Wenn wir das Auswahlaxiom (**24 b**) voraussetzen, so gilt außerdem, daß jede nicht induktive Kardinalzahl bzw. Klasse reflexiv ist und umgekehrt:

— nc induct = nc refl; — cls induct = cls refl.

Unter dieser Voraussetzung stimmen also die beiden Einteilungen überein.

24 e. Das Unendlichkeitsaxiom besagt, daß es (in einem beliebigen Typus) für jede induktive Kardinalzahl eine zu ihr gehörende Klasse gibt:

(μ) : μ ∊ nc induct . ⊃ . ∃! μ

Äquivalent damit ist die Annahme: (μ) : μ ∊ nc induct . ⊃ . $\mu \neq \mu + 1$. Auch dieses Axiom wird, als Existenzbehauptung, nicht unter die logischen Grundsätze aufgenommen.

Gilt das Axiom nicht, so gibt es (für jeden Typ) eine bestimmte induktive Kardinalzahl derart, daß alle größeren leer sind, also identisch zusammenfallen.

Anwendung: Teil II, **33** (teilweise), **37**.

25. Verschiedene Zerlegungen einer Relation

25 a. Ist x Vorderglied, aber nicht Hinterglied von P, so heißt x ein „Anfangsglied" von P; „x B P":

D 25·01. B $=_{\mathrm{Df}}$ $\hat{x}\,\hat{P}\,(x$ ∊ D'P — Q'$P)$

$\overrightarrow{\mathsf{B}}$'$P$ sind die Anfangsglieder, $\overrightarrow{\mathsf{B}}$'$\breve{P}$ die „Endglieder" von P.

Beispiele. Siehe Beispiele in **11 f.** $\vdash$. B'G = a; $\vdash$. $\overrightarrow{\mathsf{B}}$'$\breve{\mathrm{G}}$ = [c, d, f, h, i, k, l]. $\vdash$. $\overrightarrow{\mathsf{B}}$'H = [d, e]; $\vdash$. B'$\breve{\mathrm{H}}$ = c.

25 b. Anfangs- und Endglieder, bezogen nicht auf das ganze Feld von P, sondern nur auf eine Klasse α, heißen „P-Minima" bzw. „P-Maxima" von α: $\overrightarrow{\mathrm{Min}}_P$'$\alpha$, $\overrightarrow{\mathrm{Max}}_P$'$\alpha$. Ein P-Minimum von α

gehört zu α und zum Feld von P und hat keinen P-Vorgänger in α:

D 25·021. $\mathsf{Min}_P = \mathsf{Min}\,(P) =_{\mathsf{Df}} \hat{x}\,\hat{\alpha}\,(x \in \alpha \cap \mathsf{C}'P - \breve{P}''\alpha)$

D 25·022. $\mathsf{Max}_P = \mathsf{Max}\,(P) =_{\mathsf{Df}} \mathsf{Min}\,(\breve{P})$

L 25·1. $\vdash . \mathsf{Min}_P \subseteq \epsilon . \mathsf{Max}_P \subseteq \epsilon$

Beispiele. Bezeichnet **am** die in Amerika geborenen Männer, so sind $\overrightarrow{\mathsf{Min}}\,(\mathbf{Va})'$ **am** die in Amerika geborenen Männer, deren Väter nicht dort geboren sind; $\overrightarrow{\mathsf{Max}}\,(\mathbf{Va})'$ **am** die in Amerika geborenen Männer, die keine in Amerika geborenen Kinder haben.

25 c. Unter der „R-Nachkommenschaft" von x verstehen wir $\overleftarrow{R_*}'x$ (so daß also x zu seiner eigenen Nachkommenschaft gerechnet wird). Gilt $z\,R_{\mathsf{po}}\,z$, so heißt z ein „zirkuläres" R-Glied. Die Nachkommenschaft von x wird in zwei Klassen zerlegt: die der zirkulären R-Glieder ($\mathrm{I}_R'x$) und die der übrigen Glieder ($\mathrm{J}_R'x$); häufig ist eine der beiden Klassen leer.

D 25·031. $\mathrm{I}_R'x =_{\mathsf{Df}} \overleftarrow{R_*}'x \cap \hat{z}\,(z\,R_{\mathsf{po}}\,z)$

D 25·032. $\mathrm{J}_R'x =_{\mathsf{Df}} \overleftarrow{R_*}'x - \mathrm{I}_R'x$

$\overleftrightarrow{R}'x$ bezeichnet die Klasse, zu der die Vorgänger und die Nachfolger von x gehören und x selbst, falls es ein R-Glied ist:

D 25·033. $\overleftrightarrow{R}'x =_{\mathsf{Df}} \overrightarrow{R}'x \cup ([x] \cap \mathsf{C}'R) \cup \overleftarrow{R}'x$

($[x] \cap \mathsf{C}'R$ bedeutet $[x]$, falls $x \in \mathsf{C}'R$, und ist andernfalls leer.)

Die Vereinigung der R-Nachkommenschaft und der R-Vorfahrenschaft ($= \breve{R}$-Nachkommenschaft) von x heißt die „R-Familie" von x. Sie ist auf Grund von D 25·033 zu bezeichnen mit $\overleftrightarrow{R_*}'x$; die R-Familien sind $\mathsf{D}'\overleftrightarrow{R_*}$.

L 25·2. $\vdash . \overleftrightarrow{R_*}'x = \overrightarrow{R_*}'x \cup \overleftarrow{R_*}'x$

Sind alle Glieder einer R-Familie zirkulär, so heißt die Familie selbst „zirkulär". Sind alle R-Glieder zirkulär, so heißt die Relation R selbst „zirkulär". Hat R kein zirkuläres Glied, so heißt R „offen" ($R_{\mathsf{po}} \subseteq \mathrm{J}$, $R_{\mathsf{po}} \in \mathsf{irr}$).

25 d. Unter dem „P-Intervall" zwischen x und y verstehen wir die Klasse der Glieder, die zugleich P-Nachkommen von x und P-Vorfahren von y sind. Je nachdem hierbei ein Glied zu seinen

eigenen Nachkommen bzw. Vorfahren gerechnet werden soll oder nicht, ergeben sich vier Arten von Intervallen:

D 25·041. $P\,(x - y) =_{\mathrm{Df}} \overleftarrow{P_{\mathrm{po}}}`x \cap \overrightarrow{P_{\mathrm{po}}}`y$

D 25·042. $P\,(x \dashv y) =_{\mathrm{Df}} \overleftarrow{P_{\mathrm{po}}}`x \cap \overrightarrow{P_{*}}`y$

D 25·043. $P\,(x \vdash y) =_{\mathrm{Df}} \overleftarrow{P_{*}}`x \cap \overrightarrow{P_{\mathrm{po}}}`y$

D 25·044. $P\,(x \vdash\!\dashv y) =_{\mathrm{Df}} \overleftarrow{P_{*}}`x \cap \overrightarrow{P_{*}}`y$

Gibt es mehrere „P-Wege" zwischen x und y, so enthält das Intervall sie alle (s. u. Beispiel). Der Intervallbegriff wird aber meist bei Reihen (**27 b**) angewandt, und da gibt es jedesmal nur éinen P-Weg.

25 e. Hat das Intervall $P(x \vdash\!\dashv y)$ $\nu + 1$ Glieder, so sagen wir: zwischen x und y besteht die Relation P_ν. Gibt es nur éinen P-Weg zwischen x und y, so bedeutet $x\, P_\nu\, y$, daß man ν „P-Schritte" braucht, um von x nach y zu gelangen.

D 25·05. $P_\nu =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{y}\,(\mathrm{Nc}`P\,(x \vdash\!\dashv y) = \nu + 1)$

L 25·31. $\vdash .\, P_0 \subset P^0$

L 25·32. $\vdash : P \in (1 \rightarrow \mathrm{cls}) \cup (\mathrm{cls} \rightarrow 1) \,.\, P_{\mathrm{po}} \subset \mathrm{J} \,.\supset .\, P_1 = P \,.$ $P_2 = P^2 \,.\, P_3 = P^3$ (usw.); d. h.: bei einer einmehrdeutigen oder mehreindeutigen, offenen Relation stimmen die Schrittrelationen mit den entsprechenden Potenzen überein.

25 f. Bei einer mehreindeutigen Relation P, die genau éin Anfangsglied $\mathrm{B}`P$ besitzt, können wir die Nachkommen von $\mathrm{B}`P$ (dieses eingeschlossen) eindeutig der Reihe nach bezeichnen mit $1_P (= \mathrm{B}`P)$, 2_P, 3_P usw. („Gliednummern"), solange kein zirkuläres Glied kommt. Diese Bezeichnung ergibt sich, wenn wir definieren:

D 25·06. $\nu_P =_{\mathrm{Df}} \breve{P}_{\nu-1}`\mathrm{B}`P$

Die Intervalle, die Schrittrelation P_ν und die Gliednummer ν_P sind Kennzeichnungen. Falls ν_P existiert, so ist die Anzahl der Glieder vom ersten bis zu ν_P, beide eingeschlossen, gleich ν. Darauf beruht das Zählen: die letztzugeordnete Zahl gibt die Anzahl aller gezählten Glieder an.

25 g. Ist α Teil von $\mathrm{C}`R$ und ist $\alpha$ $\breve{\mathrm{R}}$-erblich (d. h. gehören alle $R$ von den $\alpha$ zu $\alpha$, **23 a**), so heißt $\alpha$ ein „Abschnitt" (oder eine „Sektion") von $R$ ($\alpha \in \mathrm{Sect}`R$):

D 25·07. $\mathsf{Sect}`R =_{\mathsf{Df}} \hat{a}\,(a \subset \mathsf{C}`R \,.\, R``a \subset a)$

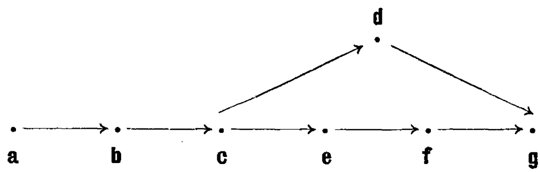


Abb. 8. Relation **A**

Beispiele. Siehe Abb. 8, Relation **A**. Familien: $\vdash . \overleftrightarrow{\mathsf{A}_*}`\mathsf{d} = [\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{g}]$; $\vdash . \overleftrightarrow{\mathsf{A}_*}`\mathsf{e} = [\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{e}, \mathsf{f}, \mathsf{g}]$; $\vdash . \overleftrightarrow{\mathsf{A}_*}`\mathsf{b} = \mathsf{C}`\mathsf{A}$

Intervalle: $\vdash . \mathsf{A}\,(\mathsf{e} \mapsto \mathsf{g}) = [\mathsf{e}, \mathsf{f}, \mathsf{g}]$. Zwischen **c** und **g** sind zwei **A**-Wege, $\vdash . \mathsf{A}\,(\mathsf{c} - \mathsf{g}) = [\mathsf{d}, \mathsf{e}, \mathsf{f}]$; $\vdash . \mathsf{A}\,(\mathsf{c} \mapsto \mathsf{g}) = [\mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}, \mathsf{f}, \mathsf{g}]$

Schrittzahl: $\vdash . \mathsf{b}\mathsf{A}_0\mathsf{b} . \mathsf{a}\mathsf{A}_1\mathsf{b} . \mathsf{a}\mathsf{A}_2\mathsf{c} . \mathsf{b}\mathsf{A}_3\mathsf{f}$ (ferner gilt $\vdash . \mathsf{c}\mathsf{A}_4\mathsf{g}$; hier bedeutet A_4 nicht die Schrittzahl; diese Verwendung von P_ν ist selten).

Gliednummer: $\vdash . 1_{\mathsf{A}} = \mathsf{B}`\mathsf{A} = \mathsf{a} . 2_{\mathsf{A}} = \mathsf{b} . 3_{\mathsf{A}} = \mathsf{c}$. Die andern Glieder können nicht in dieser Weise bezeichnet werden.

Abschnitte. $\vdash . [\mathsf{a}], [\mathsf{a}, \mathsf{b}], [\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{e}], [\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}] \in \mathsf{Sect}`\mathsf{A}$

Anwendung: Teil II, **31**, **32**.

26. Progressionen

26 a. Die Relation N (D 21·06) hat folgende Eigenschaften: 1. sie ist eineindeutig, 2. sie hat genau éin Anfangsglied, 3. jedes andere Glied ist ein Nachkomme des Anfangsgliedes, 4. jedes Glied hat einen Nachfolger, es gibt also kein Endglied. Relationen mit diesen Eigenschaften heißen „Progressionen“. Die Definition kann so zusammengefaßt werden (vgl. Teil II, **32 c**):

D 26·01. $\mathsf{prog} =_{\mathsf{Df}} (1 \to 1) \cap \hat{R}\,(\mathsf{D}`R = \overleftarrow{R_*}`\mathsf{B}`R)$

L 26·11, 12 besagen, daß aus der Definition die Eigenschaften (2), (3), (4) folgen:

L 26·11. $\vdash :. R \in \mathsf{prog} . \equiv : R \in 1 \to 1 . \mathsf{E}!\,\mathsf{B}`R : (x) : x \in \mathsf{D}`R . \equiv . x \in \overleftarrow{R_*}`\mathsf{B}`R$

L 26·12. $\vdash : R \in \mathsf{prog} . \supset . \mathsf{G}`R \subset \mathsf{D}`R . \mathsf{C}`R = \mathsf{D}`R$

Die Progressionen sind offen (**25 c**):

L 26·2. $\vdash : R \in \mathsf{prog} . \supset . R_{\mathsf{po}} \in \mathsf{J}$

L 26·3. $\vdash . \mathsf{N} \in \mathsf{prog}$

L 26·41. $\vdash . \mathsf{prog} \in \mathsf{struct}$

L 26·42. $\vdash . \mathsf{prog} \in \mathsf{nr}$

L 26·43. $\vdash : R \in \mathsf{prog} . \equiv . R \, \mathsf{Smor} \, \mathsf{N}$ (Jede Progression ist isomorph der der Kardinalzahlen).

26 b. Die Kardinalzahl des Feldes jeder Progression, also auch die Anzahl der natürlichen (induktiven) Zahlen, ist $\aleph_0$ (Aleph Null, die kleinste unendliche Kardinalzahl):

D 26·02. $\aleph_0 =_{\mathsf{Df}} \mathsf{D}``\mathsf{prog}$

Entsprechend L 26·43:

L 26·5. $\vdash : \alpha \in \aleph_0 . \equiv . \alpha \, \mathsf{Sm} \, \mathsf{nc\,induct}$

L 26·6. $\vdash . \aleph_0 \in \mathsf{nc}$

Anwendung: Teil II, **33**.

27. Reihen

27 a. Eine Relation R heißt „zusammenhängend" oder „verbunden" ($R \in \mathsf{connex}$), wenn zwischen zwei beliebigen, verschiedenen R-Gliedern stets R oder $\breve{R}$ besteht:

D 27·01. $\mathsf{connex} =_{\mathsf{Df}} \hat{R}\,(\mathsf{J} \upharpoonright \mathsf{C}`R \subseteq R \cup \breve{R})$

In der Pfeilfigur einer zusammenhängenden Relation liegt zwischen zwei beliebigen verschiedenen Punkten stets ein Pfeil. In der Matrix einer zusammenhängenden Relation ist von zwei konjugierten Stellen mindestens eine besetzt.

L 27·11. $\vdash :. R \in \mathsf{connex} . \equiv : (x,y) : x, y \in \mathsf{C}`R . x \neq y . \supset . x \, R \cup \breve{R} \, y :$

$\equiv : (x) : x \in \mathsf{C}`R . \supset . \overleftrightarrow{R}`x = \mathsf{C}`R$

Das Feld einer zusammenhängenden Relation besteht also aus nur éiner Familie.

L 27·12. $\vdash . \mathsf{connex} \in \mathsf{struct}$

Eine zusammenhängende Relation (also auch jede Reihe, **27 b**) hat höchstens éin Anfangsglied und höchstens éin Endglied; jede Klasse hat in bezug auf sie höchstens éin Maximum und höchstens éin Minimum:

L 27·13. $\vdash : R \in \mathsf{connex} . \supset . \overrightarrow{\mathsf{B}}`R, \overrightarrow{\mathsf{B}}`\breve{R}, \overrightarrow{\mathsf{Max}_R}`\alpha, \overrightarrow{\mathsf{Min}_R}`\alpha \in 0 \cup 1$

27 b. Irreflexive, transitive, zusammenhängende Relationen heißen „Reihen“. (Unter einer Reihe verstehen wir nicht eine Klasse, sondern eine Relation; denn eine Klasse kann in verschiedenen Weisen geordnet werden, und zwar jedesmal durch eine bestimmte Relation, und bei einer Reihe ist gerade die Ordnung das Wesentliche). Die Klasse der Reihen wird mit ser bezeichnet (von *series*).

D 27·02. $\mathsf{ser} =_{\mathsf{Df}} \mathsf{irr} \cap \mathsf{trans} \cap \mathsf{connex}$

L 27·21. $\vdash : R \in \mathsf{ser} . \equiv . R \in \mathsf{irr} \cap \mathsf{trans} \cap \mathsf{connex} . \equiv . R \in \mathsf{as} \cap \mathsf{trans} \cap \mathsf{connex} . \equiv . R \subseteq \mathsf{J} . R^2 \subseteq R . \mathsf{J} \restriction \mathsf{C}`R \subseteq R . \equiv . R \in \mathsf{connex} . R^2, R^3 \in \mathsf{irr} . \equiv . R \in \mathsf{connex} . R^6 \in \mathsf{irr} . \equiv . R \in \mathsf{connex} . R_{\mathsf{po}} \in \mathsf{irr}$

Jeder dieser zueinander äquivalenten Ausdrücke könnte auch zur Definition von ser verwendet werden.

L 27·22. $\vdash . \mathsf{Cnv}``\mathsf{ser} \subset \mathsf{ser}$

L 27·23. $\vdash . \mathsf{ser} \in \mathsf{struct}$

Ist R eine Reihe, so ist nicht jede Teilrelation von R wieder eine Reihe, wohl aber eine solche, die durch Beschränkung von R entsteht:

L 27·24. $\vdash : R \in \mathsf{ser} . \supset . R \upharpoonright \alpha \in \mathsf{ser}$

Anwendung: Teil II, **35**, **36**.

28. Grenzbegriffe

28 a. Die früheren Begriffe $\overrightarrow{\mathsf{B}}`R$, $\overrightarrow{\mathsf{B}}`\breve{R}$, $\overrightarrow{\mathsf{Max}_R}`\alpha$, $\overrightarrow{\mathsf{Min}_R}`\alpha$ (**25 a, b**) gehören schon zu den Grenzbegriffen. Jene sind, wie auch die weiteren Grenzbegriffe, besonders für Reihen wichtig (vgl. L. 27·13 und L 28·32).

x heißt ein „Sequens“ von α in bezug auf R ($x \, \mathsf{Seq}_R \, \alpha$), wenn x unmittelbarer R-Nachfolger von α ist, genauer: wenn x ein R-Minimum derjenigen Glieder ist, die nach allen Gliedern von $\alpha \cap \mathsf{C}`R$ kommen. Ein Sequens in bezug auf $\breve{R}$ heißt eine „Präcedens“ in bezug auf R.

D 28·01. $\mathsf{Seq}_R = \mathsf{Seq}\,(R) =_{\mathsf{Df}} \hat{x}\hat{\alpha} \left\{ x \, \mathsf{Min}_R \;\; \mathsf{p}`\overleftarrow{R}``(\alpha \cap \mathsf{C}`R) \right\}$

D 28·02. $\mathsf{Praec}_R = \mathsf{Praec}\,(R) =_{\mathsf{Df}} \mathsf{Seq}\,(\breve{R})$

L 28·11. $\vdash : x \, \mathsf{Praec}_R \, \alpha . \equiv . x \, \mathsf{Max}_R \;\; \mathsf{p}`\overrightarrow{R}``(\alpha \cap \mathsf{C}`R)$

L 28·12. $\vdash : x \, \mathsf{Seq}_R \, \alpha . \supset . x \in \mathsf{C}`R - \alpha$

28 b. x sei ein R-Sequens von α. Hat α ein R-Maximum, so ist x ein unmittelbarer Nachfolger eines solchen. Hat α kein R-Maximum, so heißt x eine „obere Grenze" von α ($x \, \mathrm{Lt}_R \, \alpha$). Entsprechend heißt ein Präcedens eine „untere Grenze" von α ($x \, \mathrm{Tl}_R \, \alpha$), wenn α kein Minimum hat.

D 28·03. $\mathrm{Lt}_R = \mathrm{Lt}(R) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Seq}_R \upharpoonright (-\mathrm{G}‘\mathrm{Max}_R)$

D 28·04. $\mathrm{Tl}_R = \mathrm{Tl}(R) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Praec}_R \upharpoonright (-\mathrm{G}‘\mathrm{Min}_R)$

L 28·21. $\vdash . \mathrm{Tl}_R = \mathrm{Lt}(\breve{R})$

L 28·22. $\vdash :. R \in \mathrm{ser} . \supset : (x, \alpha) : x = \mathrm{Lt}_R‘\alpha . \equiv . x \in C‘R - \alpha . \overrightarrow{R}‘x = R“\alpha$

(x ist dann und nur dann obere Grenze von α in bezug auf eine Reihe R, wenn x ein R-Glied ist, das nicht zu α gehört, und wenn jeder R-Vorgänger von x ein R-Vorgänger eines Elementes von α ist und umgekehrt.)

28 c. „Limax" bedeutet obere Grenze oder Maximum, „Limin" untere Grenze oder Minimum:

D 28·05. $\mathrm{Limax}_R = \mathrm{Limax}(R) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Max}_R \cup \mathrm{Lt}_R$

D 28·06. $\mathrm{Limin}_R = \mathrm{Limin}(R) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Min}_R \cup \mathrm{Tl}_R$

L 28·31. $\vdash . \mathrm{Limin}_R = \mathrm{Limax}(\breve{R})$

In bezug auf eine zusammenhängende Relation (also auch auf jede Reihe) hat jede Klasse höchstens éin Sequens, höchstens éin Präcedens, höchstens éine obere Grenze, höchstens éine untere Grenze, höchstens éin Limax, höchstens éin Limin (vgl. L 27·13):

L 28·32. $\vdash : R \in \mathrm{connex} . \supset . \overrightarrow{\mathrm{Seq}_R}‘\alpha, \ \overrightarrow{\mathrm{Praec}_R}‘\alpha, \ \overrightarrow{\mathrm{Lt}_R}‘\alpha, \ \overrightarrow{\mathrm{Tl}_R}‘\alpha, \ \overrightarrow{\mathrm{Limax}_R}‘\alpha, \ \overrightarrow{\mathrm{Limin}_R}‘\alpha \ \in \ 0 \cup 1$

Hat α ein oder mehrere Maxima in bezug auf R, so sind diese zugleich die Limax:

L 28·33. $\vdash : \exists ! \overrightarrow{\mathrm{Max}_R}‘\alpha . \supset . \overrightarrow{\mathrm{Limax}_R}‘\alpha = \overrightarrow{\mathrm{Max}_R}‘\alpha$

Hat α kein Maximum in bezug auf R, so sind die Sequenten von α die oberen Grenzen von α und zugleich die Limax von α:

L 28·34. $\vdash : \overrightarrow{\mathrm{Max}_R}‘\alpha = \Lambda . \supset . \overrightarrow{\mathrm{Limax}_R}‘\alpha = \overrightarrow{\mathrm{Seq}_R}‘\alpha = \overrightarrow{\mathrm{Lt}_R}‘\alpha$

29. Stetigkeit

29 a. Eine Relation heißt „wohlgeordnet", wenn jede nicht leere Teilklasse ihres Feldes mindestens ein Minimum hat. Die Klasse der wohlgeordneten Relationen wird bezeichnet mit bord (von *bene ordinata*), die der wohlgeordneten Reihen mit Ω.

D 29·01. $\mathrm{bord} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\{\mathrm{Cl\,ex}`C`R \subset \mathrm{a}`\mathrm{Min}_R\}$

D 29·02. $\Omega =_{\mathrm{Df}} \mathrm{ser} \cap \mathrm{bord}$

Die Klasse der Ordinalzahlen, d. h. der Relationszahlen von wohlgeordneten Reihen (vgl. **22 c**), wird bezeichnet mit no:

D 29·03. $\mathrm{no} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{Nr}``\Omega$

L 29·1. $\vdash . \mathrm{bord}, \Omega \in \mathrm{struct}$

29 b. Eine Relation R heißt „dedekindisch", wenn jede Klasse (mindestens) ein R-Maximum oder ein R-Sequens hat; mit anderen Worten: wenn jede Klasse (mindestens) ein Limax hat (L 29·21).

D 29·04. $\mathrm{ded} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\{(\alpha) . \alpha \in \mathrm{a}`\mathrm{Max}_R \cup \mathrm{a}`\mathrm{Seq}_R\}$

L 29·21. $\vdash : R \in \mathrm{ded} . \equiv . (\alpha) . \alpha \in \mathrm{a}`\mathrm{Limax}_R$

Eine wohlgeordnete Reihe mit éinem Endglied ist dedekindisch:

L 29·22. $\vdash : R \in \Omega . \mathrm{E!}\, \mathrm{B}`\breve{R} . \supset . R \in \mathrm{ded}$

L 29·23. $\vdash . \mathrm{ded} \in \mathrm{struct}$

L 29·24. $\vdash : R \in \mathrm{ded} . \supset . \exists !\, \overrightarrow{\mathrm{B}}`R . \exists !\, \overrightarrow{\mathrm{B}}`\breve{R}$

29 c. R heißt „dicht", wenn $R \subseteq R^2$, d. h. wenn jedes R-Paar ein Zwischenglied hat. R heißt „in α dicht", wenn $R \upharpoonright \alpha \subseteq R^2$. R heißt „nirgends dicht", wenn R in keinem Intervall dicht ist.

R heißt „von dedekindischer Stetigkeit" ($R \in \mathrm{dedek}$), wenn R dedekindisch, transitiv und dicht ist:

D 29·05. $\mathrm{dedek} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{ded} \cap \hat{R}\,(R^2 = R)$

Für Reihen ist diese Eigenschaft gleichbedeutend damit, daß die Klassen, die ein Maximum haben, kein Sequens haben:

L 29·31. $\vdash :. R \in \mathrm{ser} . \supset : R \in \mathrm{dedek} . \equiv . \mathrm{a}`\mathrm{Max}_R = -\mathrm{a}`\mathrm{Seq}_R$

L 29·32. $\vdash . \hat{R}\,(R \subseteq R^2) \in \mathrm{struct}$

L 29·33. $\vdash . \mathrm{dedek} \in \mathrm{struct}$

In einer dedekindischen Relation kommen keine „Lücken" vor; jeder „Schnitt" ist durch mindestens ein Glied markiert; in einer Reihe von dedekindischer Stetigkeit ist jeder Schnitt durch genau éin Glied markiert.

29 d. Die Reihen, die isomorph sind zur Reihe der (der Größe nach geordneten) rationalen, echten Brüche, heißen „rationale Reihen" (η). Sie können (nach Cantor) definiert werden als die dichten Reihen ohne Anfangs- und Endglieder, deren Felder $\aleph_0$ Elemente haben:

D 29·06. $\eta =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\{R \in \mathrm{ser} \,.\, R \subseteq R^2 \,.\, C'R \in \aleph_0 \,.\, D'R = \mathrm{G}'R\}$

L 29·41. $\vdash .\, \eta \in \mathrm{struct}$

Rationale Reihen sind einander isomorph; also ist η eine Relationszahl:

L 29·42. $\vdash : R, S \in \eta \,.\supset .\, R \,\mathrm{Smor}\, S$

L 29·43. $\vdash .\, \eta \in \mathrm{nr}$

29 e. Ist α Teil von $C'R$, und liegt zwischen jedem R-Paar ein Element von α (R muß also dicht sein), so heißt α eine „Zwischenklasse" in R ($\alpha \,\mathrm{Med}\, R$):

D 29·07. $\mathrm{Med} =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha} \hat{R} \{\alpha \subset C'R \,.\, R \subseteq R \upharpoonright \alpha \mid R\}$

Eine Relation heißt „von Cantorscher Stetigkeit" oder kurz „stetig", wenn sie eine dedekindische Reihe ist und eine Zwischenklasse mit $\aleph_0$ Elementen hat. Die Klasse der stetigen Relationen wird mit ϑ bezeichnet:

D 29·08. $\vartheta =_{\mathrm{Df}} \mathrm{ser} \cap \mathrm{ded} \cap \breve{\mathrm{Med}}{}'' \aleph_0$

Jede stetige Relation hat auch dedekindische Stetigkeit (die Umkehrung gilt nicht!):

L 29·51. $\vdash .\, \vartheta \subset \mathrm{dedek}$

L 29·52. $\vdash .\, \vartheta \in \mathrm{struct}$

Stetige Relationen sind miteinander isomorph, also ist ϑ eine Relationszahl:

L 29·53. $\vdash : R, S \in \vartheta \,.\supset .\, R \,\mathrm{Smor}\, S$

L 29·54. $\vdash .\, \vartheta \in \mathrm{nr}$

Das ist der Vorzug dieses (Cantorschen) Stetigkeitsbegriffes vor dem Dedekindischen.

Die reellen Zahlen irgend eines Intervalles bilden eine stetige Reihe; die rationalen Zahlen desselben Intervalles sind dabei eine Zwischenklasse mit $\aleph_0$ Elementen.

Eine Übersicht über die wichtigsten Zeichen findet sich im Anhang: **45**, S. 105.

Zweiter Teil

Angewandte Logistik

(„AS" bedeutet: Axiomensystem)

30. Über die axiomatische Methode

30 a. Die axiomatische Methode besteht darin, einerseits die Aussagen, andererseits die Begriffe irgend eines (nichtlogischen) Gebietes nach ihrer logischen Abhängigkeit zu ordnen.

Die Aussagen des Gebietes werden in folgender Weise geordnet:

Gewisse Aussagen, die „Axiome", werden unbewiesen an den Anfang gestellt (AS). Alle weiteren Aussagen werden als „Lehrsätze" in schrittweisem Fortgang („Kettendeduktionen") aus diesen Axiomen deduziert.

Für das System der Axiome gelten dabei folgende Forderungen:

1 a. Die Axiome müssen hinreichend sein zur Deduktion der übrigen Aussagen;

1 b. die Axiome müssen widerspruchsfrei sein;

Die Begriffe des Gebietes werden in folgender Weise geordnet:

Gewisse Begriffe, die „Grundbegriffe", werden undefiniert an den Anfang gestellt. Alle weiteren Begriffe werden als „abgeleitete Begriffe" in schrittweisem Fortgang („Kettendefinitionen") aus diesen Grundbegriffen definiert.

Für das System der Grundbegriffe gelten dabei folgende Forderungen:

1 a. Die Grundbegriffe müssen hinreichend sein zur Definition der übrigen Begriffe;

1 b. die Definitionen müssen widerspruchsfrei sein;

2. ökonomische Forderung: die Axiome sollen *notwendig* sein zur Deduktion der übrigen Aussagen;

oder: die Axiome dürfen nach Streichung irgend eines von ihnen nicht mehr hinreichend sein;

oder: keins der Axiome darf aus den übrigen deduzierbar sein („*Unabhängigkeit*").

Die Erfüllung der Forderungen 1 a und b ist unerläßlich, die der Forderung 2 nur wünschenswert.

2. ökonomische Forderung: die Grundbegriffe sollen *notwendig* sein zur Definition der übrigen Begriffe;

oder: die Grundbegriffe dürfen nach Streichung irgend eines von ihnen nicht mehr hinreichend sein;

oder: keiner der Grundbegriffe darf aus den übrigen definierbar sein („*Unabhängigkeit*").

Die Erfüllung der Forderungen 1 a und b ist unerläßlich, die der Forderung 2 nur wünschenswert.

30 b. Die gegebene Erläuterung ist nur die eine von zwei verschiedenen Auffassungen, in denen jedes gegebene AS betrachtet werden kann. Jedes AS, zusamt den angeschlossenen Deduktionen und Definitionen, ist zunächst ein System von Zeichenkombinationen, für dessen Deutung die folgenden Möglichkeiten vorliegen:

1. Die Zeichen der Grundbegriffe („Grundzeichen") bezeichnen bestimmte nichtlogische Begriffe; es sind also *nichtlogische Konstanten*; die Axiome und die deduzierten Lehrsätze sind Aussagen über diese Begriffe.

2. Die Grundzeichen haben an sich noch keine Bedeutung, sondern bekommen sie erst durch das AS: sie sollen das bezeichnen, was die durch das AS angegebenen Eigenschaften und Beziehungen hat („*implizite Definition*"); exakter ausgedrückt: die Grundzeichen sind *Variable*, die Axiome und Lehrsätze sind dementsprechend nicht Aussagen, sondern Aussagefunktionen; jeder Lehrsatz läßt sich aber in eine eigentliche Aussage umformen, nämlich in eine generelle Implikation mit der Konjunktion der Axiome als Implikans und dem Lehrsatz als Implikat.

In jedem AS werden (nach der zweiten Auffassung) ein oder mehrere Grundbegriffe als „uneigentliche Begriffe" implizit definiert. Es wird aber außerdem durch jedes AS, wenn es n Grundbegriffe hat, ein bestimmter, und zwar ein logischer Begriff

expliziert definiert, der „Explizitbegriff" des AS; dieser Begriff ist für $n = 1$ eine Klasse, sonst eine n-stellige Relation. Sind etwa $x, y, \ldots\ \alpha, \beta, \ldots\ P, Q, \ldots$ die Grundvariabeln des AS, und bezeichnen wir die Konjunktion der Axiome (also eine Aussagefunktion) mit $\mathbf{AS}(x, y, \ldots\ \alpha, \beta, \ldots\ P, Q, \ldots)$, so lautet die Definition des Explizitbegriffs dieses AS:

$$\hat{x}\hat{y}\ldots\hat{\alpha}\hat{\beta}\ldots\hat{P}\hat{Q}\ldots\{\mathbf{AS}(x, y, \ldots \alpha, \beta, \ldots P, Q, \ldots)\}$$

Der Explizitbegriff des Peanoschen AS der Zahlen (**32**) ist z. B. die Klasse der Zahlfolgen, die das AS erfüllen; das ist der logische Begriff **prog** (Klasse der Progressionen, **26 a**); weiteres Beispiel eines Explizitbegriffs: **hausd** (**33**, D 11); der Explizitbegriff eines geometrischen AS, z. B. eines AS der projektiven Geometrie (**34**, **35**) stellt den logischen Begriff der betreffenden Raumart dar (z. B. Begriff „projektiver Raum"). Auf diese Weise kann auch die Geometrie, anstatt als Anwendungsfall der Logistik auf ein nichtlogisches Gebiet, dargestellt werden als Zweig der Logistik selbst (wie die Arithmetik, **21 c**).

Die folgenden Beispiele logistisch dargestellter ASe können nun nach Belieben in der ersten oder in der zweiten Auffassungsweise betrachtet werden. Wir wollen für die Schreibweise und Sprechweise die erste Auffassung verwenden, wir sprechen also von „Grundbegriffen", nicht von „Variabeln", und bezeichnen sie mit halbfetter Schrift. Dadurch wird das Verständnis des AS etwas erleichtert, indem die Bezeichnungen der Grundbegriffe (z. B. **pu** „Punkte", **Zw** „zwischen", anstatt: α, R) an bestimmte Realbegriffe erinnern. Soll aber ein AS rein logisch aufgefaßt werden, so brauchen wir nur die Grundzeichen durch entsprechende Variable zu ersetzen, die Lehrsätze wie vorhin angegeben umzuformen und den Explizitbegriff zu bilden.

Literatur. Über die axiomatische Methode: Hilbert, Axiomatisches Denken, Math. Ann. 78, 405ff., 1918; Weyl [Handb.] 16ff.; Fraenkel [Einl.] § 18 (mit ausführlichen Literaturangaben). Über die zweite Deutung: Carnap, Eigentl. u. uneig. Begriffe, Symposion I 355ff. 1927 („Explizitbegriff": S. 368f.). Über die verschiedenen Raumarten als rein logische Begriffe: Russell [Pr.] 429ff.; die Durchführung soll in PM IV gegeben werden (noch nicht erschienen).

A. Mengenlehre und Arithmetik

31. AS der Mengenlehre

(Dieses AS kann gelesen werden nach dem Studium des I., systematischen Teiles bis **25** einschl.)
(Im Anschluß an Fraenkel [Grundl.]; vgl. [Einl.] § 16).

Grundbegriff: **El**. (Fraenkel: „ε"; bei uns nicht verwendbar, weil dieses Zeichen schon eine logistische Bedeutung hat). $x\ \mathbf{El}\ y$ heißt: die Menge x ist Element der Menge y.

Abgeleitete Begriffe. Die Mengen: $\mathbf{me} =_{\mathrm{Df}} \mathsf{C}`\mathbf{El}$ (diese „Mengen" sind nicht Klassen, sondern Individuen!).

Die „entsprechende Klasse": $\mathbf{Kl} =_{\mathrm{Df}} \overrightarrow{\mathbf{El}}$; hiernach ist $\mathbf{Kl}`x$ die Klasse der Elemente der Menge x.

„Teilmenge von": $\mathbf{Tl} =_{\mathrm{Df}} \breve{\mathbf{Kl}} \,|\, \subset \,|\, \mathbf{Kl}$

„Gleichheit": $\mathbf{Gl} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{Tl} \cap \breve{\mathbf{Tl}}$

„Elementefremd zueinander": $\mathbf{Fre} =_{\mathrm{Df}} \breve{\mathbf{Kl}} \,|\, \mathsf{Fr} \,|\, \mathbf{Kl}$

Die Mengen paarweise elementfremder Mengen:

$$\mathbf{fr} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\,\{\mathsf{J} \upharpoonright \mathbf{Kl}`x \Subset \mathbf{Fre}\}$$

Die existierenden (d. h. nichtleeren) Mengen: $\mathbf{ex} =_{\mathrm{Df}}$ ᗡ$`\mathbf{El}$

A 1. $\mathbf{Gl} \,|\, \mathbf{El} \Subset \mathbf{El}$

Paarmenge: $\mathbf{Pr} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{u}\hat{v}\,\{\mathbf{Kl}`x = [u, v]\}$; $x = \mathbf{Pr}`(u, v)$ heißt: x ist die Paarmenge $\{u, v\}$.

A 2. $\mathsf{J} \upharpoonright \mathbf{me} \Subset {}^{1}\mathbf{Pr}$ (Existenz der Paarmenge).

Vereinigungsmenge: $\mathbf{Ver} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{y}\,\{\mathbf{Kl}`x = \mathsf{s}`\mathbf{Kl}``\mathbf{Kl}`y\}$

(oder $\mathbf{Ver} =_{\mathrm{Df}} \breve{\mathbf{Kl}} \,|\, \mathsf{s} \,|\, \mathbf{Kl}_{\epsilon} \,|\, \mathbf{Kl}$)

A 3. $\mathbf{ex} \subset$ ᗡ$`\mathbf{Ver}$ (Existenz der Vereinigungsmenge).

Potenzmenge: $\mathbf{Po} =_{\mathrm{Df}} \breve{\mathbf{Kl}} \,|\, \overrightarrow{\mathbf{Tl}}$

A 4. $\mathbf{me} \subset$ ᗡ$`\mathbf{Po}$ (Existenz der Potenzmenge).

Aussonderung: $\mathbf{Aus} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{y}\,\hat{P}\hat{Q}\,\{x, y \in \mathbf{me} \,.\, \mathbf{Kl}`x = \mathbf{Kl}`y \cap \hat{u}\,(P`u\ \mathbf{El}\ Q`u)\}$ (s. [Grundl.] 106).

Die komplizierten Definitionen der einfachen Funktionen (**fkt**) und der Doppelfunktionen (**dofkt**) beliebiger endlicher Stufe zwischen Mengen seien hier der Kürze wegen übergangen (vgl. **44**, Üb.-Aufg. 2, S. 98).

A. 5. ([Grundl.] 106: V′) $(y, P, Q) : y \in$ **me** . $P, Q \in$ **fkt** . $\supset$. ^{1}**Aus** (y, P, Q)

Produkt ([Grundl.] 13, 78f.; entspricht der Klasse der Auswahlklassen, s. **24 a**): **Prod**‘$x =_{Df}$ ($\breve{\textbf{Kl}}$)^2“D“ **El**$_\varDelta$‘**Kl**‘x

Auswahlaxiom: A 6. (x): $x \in$ **ex** $\cap$ **fr** . **Kl**‘$x \subset$ **ex** . $\supset$. **Prod**‘$x \in$ **ex**

A 7 a. $\exists$! **me**

Die Nullmenge: **nm** $=_{Df}$ B‘ **El**

Die Einzelmenge $\{x\}$ von x: **Einz**‘$x =_{Df}$ $\breve{\textbf{Kl}}$‘$[x]$

A 7 b. $\exists$! **me** : $(\exists\, x)$. **nm El** x . **Einz**“**Kl**‘ $x \subset$ **Kl**‘x

(anstatt „**nm El** x“ besser: E! B‘ **El** . $\supset$. (B‘ **El**) **El** x)

x ist Ersatzmenge von y in bezug auf die Funktion R: **Ers** (x, y, R): **Ers** $=_{Df}$ $\hat{x}\hat{y}\hat{R}$ $\{R \in$ **fkt** . **Kl**‘$x = R$“**Kl**‘$y\}$

A 8. ([Grundl.] 115) $(x, R) : x \in$ **me** . $R \in$ **fkt** . $\supset$. E! **Ers**‘(x, R)

Die Menge Z (Zahlenreihe, [Grundl.] 99): **za** $=_{Df}$ $\overrightarrow{\textbf{Einz}_*}$‘ **nm**

Beschränktheitsaxiom ([Grundl.] 102): **me** $\subset$ (Sg‘ $\breve{\text{s}}$‘**dofkt**)‘(**nm**, **za**)

32. Peanos AS der natürlichen Zahlen

32 a. Die ursprüngliche Form. (Peano [Form.] II, § 2: Arithmétique. 1898. S. 1f.; Russell [Einf.] 5). (Lesbar nach **14**.)

Drei Grundbegriffe: Null, Zahl, Nachfolger; wir bezeichnen sie mit **nu**, **za**, **Nf**.

A 1. **nu** $\in$ **za**

A 2. $(x) : x \in$ **za** . $\supset$. **Nf**‘$x \in$ **za**

oder: **Nf**“**za** $\subset$ **za**; Erblichkeit, **23 a**.

A 3. $(x, y) : x, y \in$ **za** . **Nf**‘$x =$ **Nf**‘y . $\supset$. $x = y$

oder: **Nf** $\in$ cls $\rightarrow$ 1 (**19 c**)

A 4. $(x) : x \in$ **za** . $\supset$. **Nf**‘$x \neq$ **nu** oder: **nu** $\sim \in$ D‘ **Nf** (**15 b**).

A 5. (α) : : **nu** $\in \alpha$: . $(x) : x \in \alpha$. $\supset$. **Nf**‘$x \in \alpha$: . $\supset$. **za** $\subset \alpha$

oder: (α) : **nu** $\in \alpha$. **Nf**“$\alpha \subset \alpha$. $\supset$. **za** $\subset \alpha$ (Prinzip der vollständigen Induktion).

32 b. Die Form mit nur éinem Grundbegriff. (Russell [Einf.] 8; PM II § 122). (Lesbar nach **25**.)

Grundbegriff: Vorgänger **Vg**.

A 1'. **Vg** ϵ 1 → 1 (hierin steckt A 3).

A 2'. E! B' **Vg** (éin Anfangsglied, die Null).

Wir definieren jetzt: D 1'. **za** $=_{Df}$ C' **Vg**.

Jede Zahl ist vom Anfangsglied (der Null) aus in endlich vielen Schritten erreichbar (entspricht A 5):

A 3'. E! B' **Vg** . ⊃ . **za** = $\overleftarrow{\mathbf{Vg}}_{*}$' B' **Vg** (Das Implikans muß hinzugefügt werden, weil sonst A 2' hieraus nach L 7·2 ableitbar würde).

A 4'. Ɑ'**Vg** ⊂ D'**Vg** (kein Endglied).

32 c. Die einfachste Form. (Lesbar nach **25**.)

(Auf dieser Form beruht die Definition der Progression, prog, **26 a**, als Explizitbegriff dieses AS, vgl. **30 b**).

Grundbegriff: **Vg**.

A 1''. **Vg** ϵ 1 → 1 (= A 1').

A 2''. D' **Vg** = $\overleftarrow{\mathbf{Vg}}_{*}$' B' **Vg** (= A 2' . 3' . 4').

B. Geometrie

33. AS der Topologie (Umgebungsaxiome)

(Lesbar nach **26**, [**24**])

(Nach Hausdorff [Grundz.] 213ff.)

33 a. Grundbegriff: **U**. „α **U** x“: α ist eine Umgebung von x.

Die Punkte: D 1. **pu** $=_{Df}$ Ɑ' **U**

A 1a. D'**U** ⊂ Cl'**pu** (die Umgebungen sind Klassen von Punkten).

A 1b. **U** ⋐ $\breve{\epsilon}$ (ein Punkt gehört zu jeder seiner Umgebungen).

A 2. (α, β, x) : α **U** x . β **U** x . ⊃ . $(\exists \gamma)$. γ **U** x . $\gamma \subset \alpha \cap \beta$ (im Durchschnitt zweier Umgebungen von x gibt es eine Umgebung).

A 3. (α, y) : $\alpha \in$ D' **U** . $y \in \alpha$. ⊃ . $(\exists \gamma)$. γ **U** y . $\gamma \subset \alpha$ (für jeden Punkt einer Umgebung α ist eine Teilklasse von α Umgebung).

A 4. (x, y) : $x, y \in$ **pu** . $x \neq y$. ⊃ . $(\exists \alpha, \beta)$. α **U** x . β **U** y . α Fr β (Existenz fremder Umgebungen zweier Punkte).

Einige weitere Begriffe der Punktmengenlehre, abgeleitet aus dem Begriff der Umgebung (für andere Grundbegriffe vgl. **44**, Üb.-Aufg. 8, 9, S. 99):

„x **Inn** α“ soll bedeuten: x ist innerer Punkt von α (eine Teilklasse von α ist Umgebung von x): D 2. $\mathbf{Inn} =_{\mathrm{Df}} \breve{\mathbf{U}} \,|\, \mathsf{C}$

„x **Rp** α“: x ist Randpunkt von α: D 3. $\mathbf{Rp} =_{\mathrm{Df}} \epsilon \dot{-} \mathbf{Inn}$

Die Gebiete (Klassen ohne Randpunkte): D 4. $\mathbf{geb} =_{\mathrm{Df}} - \mathrm{G}{}^{\backprime}\mathbf{Rp}$

Die Randmengen (Klassen ohne innere Punkte): D 5. $\mathbf{rdm} =_{\mathrm{Df}} - \mathrm{G}{}^{\backprime}\mathbf{Inn}$

Lehrsätze: „Der ganze Raum ist ein Gebiet“: $\mathbf{pu} \in \mathbf{geb}$
„Jede Umgebung ist ein Gebiet“: $\mathrm{D}{}^{\backprime}\mathbf{U} \subset \mathbf{geb}$

Grenzpunkt: D 6. $\mathbf{Grp} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{\alpha}\{x\,\mathbf{Rp}\,\alpha \,.\, \mathsf{v} \,.\, x\,\mathbf{Rp} - \alpha\}$

Berührungspunkt: D 7. $\mathbf{Ber} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{\alpha}\{(\beta) : \beta\,\mathbf{U}\,x \,.\, \supset .\, \exists\,!\,\alpha \cap \beta\}$

Häufungspunkt: D 8. $\mathbf{Hf} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{\alpha}\{(\beta) : \beta\,\mathbf{U}\,x \,.\, \supset .\, \alpha \cap \beta \in \mathrm{cls\,refl}\}$

Verdichtungspunkt: D 9. $\mathbf{Verd} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{\alpha}\{(\beta) : \beta\,\mathbf{U}\,x \,.\, \supset .\, \mathrm{Nc}{}^{\backprime}(\alpha \cap \beta) > \aleph_0\}$ ($\aleph_0$: **26 b**)

Isolierter Punkt: D 10. $\mathbf{Is} =_{\mathrm{Df}} \epsilon \dot{-} \mathbf{Hf}$

33 b. Logische Begriffe. Wir gehen zur zweiten Deutung des AS über (**30 b**), indem wir **U** als Variable auffassen. Wir schreiben also U anstatt **U**. Der Explizitbegriff des AS ist die Klasse der „Hausdorffschen Umgebungssysteme“ (hausd), ein rein logischer Begriff:

$$\text{D 11.}\quad \mathrm{hausd} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\{\mathrm{D}{}^{\backprime}R \subset \mathrm{Cl}{}^{\backprime}\mathrm{G}{}^{\backprime}R \,.\, R \subset \breve{\epsilon} : (\alpha,\beta) \,.\, \overleftarrow{R}{}^{\backprime}\alpha \cap \overleftarrow{R}{}^{\backprime}\beta \subset s{}^{\backprime}\overleftarrow{R}{}^{\backprime\backprime}\mathrm{Cl}{}^{\backprime}(\alpha \cap \beta) : \epsilon \upharpoonright \mathrm{D}{}^{\backprime}R \subset \breve{R} \,|\, \mathsf{C} \,.\, \mathrm{J} \upharpoonright \mathrm{G}{}^{\backprime}R \subset \breve{R} \,|\, \mathrm{Fr} \,|\, R\}$$

(Man vergleiche diese gedrängtere Form der Axiome mit der oben gegebenen!)

Fassen wir eine Relation Q als Nachbarschaft oder Ähnlichkeit auf, so können wir folgende Klassen als Umgebungen von x nehmen: $[x]$ $(= \overrightarrow{Q^0}{}^{\backprime}x)$, $\overrightarrow{(Q^0 \cup Q)}{}^{\backprime}x$, $\overrightarrow{(Q^0 \cup Q \cup Q^2)}{}^{\backprime}x$, usw. Die hierdurch bestimmte Umgebungsrelation bezeichnen wir mit $\mathrm{Umr}{}^{\backprime}Q$:

$$\text{D 12.}\quad \mathrm{Umr}{}^{\backprime}Q =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha}\hat{x}\{(\exists\, n, \varkappa) \,.\, n \in \mathrm{nc\,induct} \,.\, \varkappa = \hat{\beta}[(\exists\, m) \,.\, m \leqq n \,.\, \beta = \overrightarrow{Q^m}{}^{\backprime}x] \,.\, \alpha = s{}^{\backprime}\varkappa\}$$

Ist Q symmetrisch und reflexiv, also eine „Ähnlichkeit“ (sim, **20 a**), so vereinfacht sich dies:

$$\text{D 13.}\quad \mathrm{Umgr}{}^{\backprime}Q =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha}\hat{x}\{(\exists\, n) \,.\, n \in \mathrm{nc\,induct} \,.\, \alpha = \overrightarrow{Q^n}{}^{\backprime}x\}$$

In beiden Fällen sind die Hausdorffschen Axiome erfüllt:

$\vdash$. D' Umr $\subset$ hausd

$\vdash$. Umgr" sim $\subset$ hausd

(Umgr wird angewendet in **39**, D 8.)

33c. Definition der Dimensionszahl (DZ). (Nach Menger, Bericht über die Dimensionstheorie, Jahresb. Math. Ver. **35**, 113 ff., 1926; bes. S. 120. Vgl. Menger, Dimensionstheorie, 1928, S. 77 ff.)

Dem Begriff **Hf** (D 8) des AS entspricht der logische Begriff Hf (x, α, U): x ist Häufungspunkt von α in bezug auf ein Hausdorffsches Umgebungssystem mit der Umgebungsrelation U:

D 14. $\mathrm{Hf} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{\alpha}\hat{U}\{U \in \mathrm{hausd} :. (\beta) : \beta\, U\, x . \supset . \alpha \cap \beta \in \mathrm{cls\ refl}\}$

Begrenzung: D 15. $\mathrm{Begr} =_{\mathrm{Df}} \hat{\delta}\hat{\beta}\hat{U}\{\delta = \overrightarrow{\mathrm{Hf}}'(\beta, U) - \beta\}$ (die Häufungspunkte einer Klasse, die nicht zur Klasse gehören).

Rekursionsformeln für die DZ, bezogen auf ein Hausdorffsches Umgebungssystem mit der Umgebungsrelation U:

„Dzph (n, α, x, U)": α hat im Punkte x höchstens die DZ n:

D 16. $\mathrm{Dzph} =_{\mathrm{Df}} \hat{n}\hat{\alpha}\hat{x}\hat{U}\{U \in \mathrm{hausd} . x \in \mathrm{C}' U . \alpha \subset \mathrm{C}' U :. (\beta) : \beta\, U\, x . \supset . (\exists \gamma) . \gamma\, U\, x . \gamma \subset \beta . \mathrm{Dz}\,(n - 1, \alpha \cap \mathrm{Begr}'(\gamma, U), U)\}$ (es gibt eine beliebig kleine Umgebung γ von x derart, daß der Durchschnitt der Begrenzung von γ mit α die DZ $n - 1$ hat).

„Dzp (n, α, x, U)": α hat im Punkte x (genau) die DZ n, bezogen auf U:

D 17. $\mathrm{Dzp} =_{\mathrm{Df}} \hat{n}\hat{\alpha}\hat{x}\hat{U}\{\mathrm{Dzph}\,(n, \alpha, x, U) . \sim \mathrm{Dzph}\,(n - 1, \alpha, x, U)\}$ (α hat in x höchstens die DZ n, aber nicht höchstens die DZ $n - 1$).

„Dz (n, α, U)": α hat (schlechthin) die DZ n, bezogen auf U:

D 18. $\mathrm{Dz} =_{\mathrm{Df}} \hat{n}\hat{\alpha}\hat{U}\{(x) : x \in \alpha . \supset . \mathrm{Dzp}'(\alpha, x, U) \leqq n :. {}^{3}\mathrm{Dzp}\,(n, \alpha, U)\}$ (die DZ von α in seinen Punkten ist kleiner oder gleich n; es gibt einen Punkt, in dem sie n ist).

Aus der Bestimmung, daß die leere Klasse und nur diese die DZ -1 haben soll, ergeben sich durch wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformeln (in der Reihenfolge D 16, 17, 18) die Definitionen für die DZ 0, 1, 2, ...

„Dzhom (n, α, U)": α hat die homogene DZ n (d. h. in jedem seiner Punkte die DZ n) in bezug auf U:

D 19. $\mathsf{Dzhom} =_{\mathsf{Df}} \hat{n}\,\hat{a}\,\hat{U}\{(x) : x \in a \,.\supset.\, \mathsf{Dzp}\,(n, a, x, U)\}$

„n $\mathsf{Dzhomum}$ Q": das Feld von Q hat die homogene DZ n in bezug auf die durch die Ähnlichkeit Q bestimmte Umgebungsrelation $\mathsf{Umgr}`Q$ (D 13):

D 20. $\mathsf{Dzhomum} =_{\mathsf{Df}} \hat{n}\,Q\{Q \in \mathsf{sim} \,.\, \mathsf{Dzhom}\,(n, \mathsf{C}`Q, \mathsf{Umgr}`Q)\}$

Alle hier definierten DZ-Begriffe sind rein logische Begriffe, da in den Definitionen keine nichtlogischen Konstanten vorkommen. Dzhom wird angewendet in: **36 a**, A 20; **36 b**, A 13; Dzp: **39**, D 8.)

34. AS der projektiven Geometrie (erste Form: die Geraden als Klassen)

(Lesbar nach **19**)

(Im Anschluß an Pieri, I principii della geometria di posizione. Mem. Accad. di Torino, XLVIII, 1898; das AS ist dargestellt bei Russell [Pr.] 382ff. und Couturat [Pr.] 150ff.)

Einziger G r u n d b e g r i f f: ger, die Klasse der Geraden, jede G e r a d e genommen a l s K l a s s e ihrer Punkte (im Unterschied zu **35**).

Die Punkte: D 1. $\mathsf{pu} =_{\mathsf{Df}} \mathsf{s}`\mathsf{ger}$ (bei Pieri zweiter Grundbegriff).

(Die Axiome Pieri I, V, VI, VII werden bei unserer Fassung aus den anderen ableitbar.)

A 1. (P. II, III) $\dot{\exists}!\, \mathsf{J} \upharpoonright \mathsf{pu}$ (Existenz zweier Punkte)

Die Gerade durch x und y:

D 2. $\overline{x\,y} =_{\mathsf{Df}} (\imath\, a)\,(a \in \mathsf{ger} \,.\, x \neq y \,.\, x, y \in a)$

A 2. (anstatt P. IV) $(a) : a \in \mathsf{ger} \,.\supset.\, (\exists\, x, y) \,.\, a = \overline{x\,y}$

Existenz der Geraden durch x, y:

A 3. (P. IX, X) $(x, y) : x, y \in \mathsf{pu} \,.\, x \neq y \,.\supset.\, \mathsf{E}!\,\overline{x\,y}$

Existenz eines dritten Punktes:

A 4. (P. VIII) $(x, y) : \mathsf{E}!\,\overline{x\,y} \,.\supset.\, \exists\,!\,\overline{x\,y} - [x, y]$

Punkt außerhalb der Geraden:

A 5. (P. XI) $(x, y) : \mathsf{E}!\,\overline{x\,y} \,.\supset.\, \exists\,!\,\mathsf{pu} - \overline{x\,y}$.

Existenz eines Schnittpunktes:

A 6. (P. XII) $(x, y, z, u, v) : x \in \mathsf{pu} - \overline{y\,z} \,.\, u \in \overline{y\,z} - [y, z] \,.\, v \in \overline{x\,z} - [x, z] \,.\supset.\, \exists\,!\,\overline{x\,u} \cap \overline{y\,v}$

Der Schnittpunkt zweier Geraden:

D 3. $\overline{xu} \times \overline{yv} =_{\mathrm{Df}} \breve{\iota}\,`(\overline{xu} \cap \overline{yv})$

Die Ebene durch x, y, z:

D 4. $\overline{xyz} =_{\mathrm{Df}} s`\hat{\alpha}\,\{(\exists u) . x \sim \in \overline{yz} . u \in \overline{yz} . \alpha = \overline{xu}\}$

Die Ebenen: D 5. $\mathbf{eb} =_{\mathrm{Df}} \hat{\gamma}\,\{(\exists x, y, z) . \gamma = \overline{xyz}\}$

Vier harmonische Punkte:

D 6. $\mathbf{Ha} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\hat{y}\hat{z}\hat{w}\{(\exists u, v) :. z, w \in \overline{xy} . uv \sim \in \overline{xy} . z \in \overline{uv} :. (r, t) : r = \overline{xu} \times \overline{yv} . t = \overline{xv} \times \overline{yu} . \supset . w \in \overline{rt}$

Punkt außerhalb der Ebene:

A 7. (P. XIII) $(x, y, z) : x \in \mathbf{pu} - \overline{yz} . \supset . \exists ! \mathbf{pu} - \overline{xyz}$

A 8. (P. XIV) $(x, y, z) : x \in \overline{yz} - [y, z] . \supset . \mathbf{Ha}`(x, y, z) \neq x$

Projektive Definition der Strecke x, y, z:

D 7. $\mathbf{Str}`(x, y, z) =_{\mathrm{Df}} \hat{u}\,\{(\exists v, w) . \mathbf{Ha}\,(x, z, v, w) . \mathbf{Ha}\,(u, y, v, w)\}$

A 9. (P. XV) $(x, y, z, u) : y \in \overline{xz} - [x, z] . u \in \overline{xz} - \mathbf{Str}`(x, y, z) - [x, z] . \supset . u \in \mathbf{Str}`(y, z, x)$

A 10. (P. XVI) $(x, y, z) : x \in \overline{yz} - [y, z] . \supset . \mathbf{Str}`(y, z, x) \cap \mathbf{Str}`(z, x, y) \subset - \mathbf{Str}`(x, y, z)$

A 11. (P. XVII) $(x, y, z, u) : x \in \overline{yz} - [y, z] . u \in \mathbf{Str}`(x, y, z) . \supset . \mathbf{Str}`(x, u, z) \subset \mathbf{Str}`(x, y, z)$

„$u\, \mathbf{Vor}_{x, y, z}\, v$“: von den Punkten u, v der Strecke x, y, z liegt u vor v im Ordnungssinne x, y, z:

D 8. $\mathbf{Vor}_{x, y, z} =_{\mathrm{Df}} \hat{u}\hat{v}\,\{u, v \in \mathbf{Str}`(x, y, z) . u \in \mathbf{Str}`\,(z, x, v)\}$

Dedekindische Stetigkeit:

A 12. (P. XVIII) $(x,y,z,\gamma,\alpha) : \gamma = \mathbf{Str}`(x,y,z) . \exists ! \alpha . \exists ! \gamma - \alpha . \supset . (\exists w) . w \in \gamma . \gamma \cap \overrightarrow{\mathbf{Vor}}_{x, y, z}`w \subset \alpha . \gamma \cap \overleftarrow{\mathbf{Vor}}_{x, y, z}`w \subset \gamma - \alpha$

35. AS der projektiven Geometrie (zweite Form: die Geraden als Relationen)

(Lesbar nach **27**)

(Russell [Pr.] 383ff., 430f.)

Einziger Grundbegriff: **k**, die Klasse der Geraden, jede Gerade genommen als (symmetrische, irreflexive) Relation ihrer Punkte (im Unterschied zu **34**).

Die Punkte: D 1. $\mathsf{pu} =_{\mathrm{Df}} s`C``\mathsf{k}$

A 1. $\exists ! J \upharpoonright \mathsf{pu}$ (wie in **34**)

A 2. $\mathsf{k} \subset \mathsf{sym}$ (Die **k**-Relationen sind symmetrisch),

A 3. $\mathsf{k} \subset \mathsf{irr}$ (irreflexiv),

A 4. $\mathsf{k} \subset \mathsf{connex}$ (zusammenhängend),

A 5. $(R) : R \in \mathsf{k} . \supset . R^2 \dot{-} I \subset R$ (aliotransitiv).

A 6. $(x, y) : x, y \in \mathsf{pu} . x \neq y . \supset . E ! (\iota R) (R \in \mathsf{k} . x R y)$ (Existenz und Einzigkeit der Geraden)

A 7. $(R) : R \in \mathsf{k} . \supset . \exists ! \mathsf{pu} - C`R$ (Punkt außerhalb der Geraden)

Die Gerade durch x, y:

D 2. $\overline{x\,y} =_{\mathrm{Df}} (\iota \alpha) \{(\exists R) . R \in \mathsf{k} . x R y . \alpha = C`R\}$

Fortsetzung ähnlich wie in **34**.

C. Physik

36. AS der Raum-Zeit-Topologie

(Vgl. Carnap, Über die Abhängigkeit der Eigenschaften des Raumes von denen der Zeit. Kantstud. XXX, 331—345, 1925; zur näheren Erläuterung der philosophischen Bedeutung des folgenden AS muß auf diesen Aufsatz verwiesen werden; zur Erläuterung der Begriffe vgl. ferner: Reichenbach, Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre, Braunschweig 1924.)

36 a. Erste Form: **K**-**Z**-System. (Lesbar nach **23**). Zwei Grundbegriffe: **K**, **Z**.

Alle raum-zeitlichen Feststellungen der Physik lassen sich zurückführen auf die Feststellungen von Koinzidenzen und die von Eigenzeitbeziehungen. Denken wir uns in üblicher Weise die Bewegung eines physikalischen Elementes dargestellt durch die „Weltlinie“ seiner „Weltpunkte“ im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum, so ist mit der Koinzidenz $x\,\mathbf{K}\,y$ gemeint: die Weltpunkte x, y desselben oder verschiedener physikalischer Elemente fallen raum-zeitlich zusammen. Mit der (topologischen, maßfreien) Eigenzeitbeziehung $x\,\mathbf{Z}\,y$ ist gemeint: x, y sind „genidentische“ Weltpunkte, d. h. Weltpunkte derselben Weltlinie (Punktereignisse an demselben physikalischen Element), und zwar ist x zeitlich vor y. Der Aufbau des im folgenden angedeu-

teten Systems zeigt, daß nicht nur die zeitlichen, sondern auch die (topologisch-)räumlichen Verhältnisse der Welt sich ausdrücken lassen durch die Relationen **K** und **Z**.

Die Axiome geben empirische, formale Eigenschaften der Grundrelationen **K**, **Z** an; und zwar entweder direkt, oder indirekt mit Hilfe von Definitionen weiterer Begriffe, die alle auf **K** und **Z** zurückgehen. Die ersten Axiome besagen, daß **K** symmetrisch und transitiv, **Z** transitiv, irreflexiv und dicht ist, und daß **Z** und **K** einander ausschließen:

A 1. $\mathbf{K} \in \mathrm{sym}$ A 2. $\mathbf{K} \in \mathrm{trans}$ A 3. $\mathbf{Z} \in \mathrm{trans}$

A 4. $\mathbf{Z} \in \mathrm{irr}$ A 5. $\mathbf{Z} \Subset \mathbf{Z}^2$ A 6. $\mathbf{Z} \Subset \dot{-}\mathbf{K}$

Die **Z**-Reihen auf den Weltlinien sind ohne Anfangs- und Endglied:

A 7. $\mathrm{D}'\mathbf{Z} \subset \text{Ɑ}'\mathbf{Z}$ A 8. $\text{Ɑ}'\mathbf{Z} \subset \mathrm{D}'\mathbf{Z}$

Die Weltpunkte sind zu definieren als die **Z**-Glieder; A 9 besagt, daß sie auch die **K**-Glieder sind:

D 1. $\mathrm{wp} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{C}'\mathbf{Z}$

A 9. $\mathrm{C}'\mathbf{K} = \mathrm{wp}$

Genidentität: D 2. $\mathbf{Gen} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{Z} \cup \breve{\mathbf{Z}} \cup \mathbf{Z}^0$

Es tritt keine Zerspaltung der Weltlinien auf, weder in Richtung auf die Vergangenheit, noch auf die Zukunft:

A 10. $\mathbf{Z} | \breve{\mathbf{Z}} \Subset \mathbf{Gen}$ A 11. $\breve{\mathbf{Z}} | \mathbf{Z} \Subset \mathbf{Gen}$

Die Weltlinien als Klassen genidentischer Weltpunkte (Abstraktionsklassen der Genidentität):

D 3. $\mathrm{wl} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{D}'\overrightarrow{\mathbf{Gen}}$ (oder: $\mathrm{Aeq}'\mathbf{Gen}$, nach L 20·3)

Die Weltlinienreihen, d. h. die Klasse der Relationen, die sich durch Beschränkung von **Z** auf die einzelnen Weltlinien ergeben:

D 4. $\mathrm{wlin} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{Z} \upharpoonright ``\mathrm{wl}$ (Operator, s. **17a, b**)

Eine physikalische W i r k u n g s b e z i e h u n g besteht dann und nur dann zwischen zwei Weltpunkten x und y, wenn eine Signalkette von x nach y geht. Da die Weltlinien den Verlauf sowohl materieller, als energetischer physikalischer Elemente darstellen, so besteht eine Signalkette aus einer Kette von Weltlinienstücken (**Z**-Strecken), die durch Koinzidenzen miteinander verbunden

sind. Wir können daher die Wirkungsbeziehung als Relation $\mathbf{W}$ auf Grund von $\mathbf{K}$ und $\mathbf{Z}$ definieren; der metaphysische Begriff des „Bewirkens“ kommt dabei gar nicht ins Spiel (vgl. Abb. 9: $x_1 \mathbf{Z} | \mathbf{K} | \mathbf{Z} | \mathbf{K} | \mathbf{Z} z_2$, also $x_1 \mathbf{W} z_2$).

D 5. $\mathbf{W} =_{\mathrm{Df}} (\mathbf{K} | \mathbf{Z})_{\mathrm{po}} | \mathbf{K}$

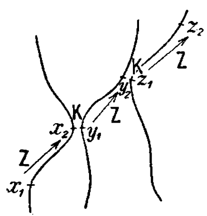


Abb. 9. Die Signalkette

Die Transitivität von $\mathbf{W}$ ist aus den bisherigen Axiomen ableitbar. Für die Irreflexivität dagegen („es gibt keinen in sich zurücklaufenden Signalzug“) muß ein neues Axiom aufgestellt werden:

A 12. $\mathbf{W} \dot{-} \mathbf{Z} \subset \mathbf{J}$

Als „gleichzeitig“ bezeichnen wir zwei Weltpunkte, wenn zwischen ihnen in keiner Richtung eine Wirkungsbeziehung besteht. Denn die Relativitätstheorie lehrt, daß es dann und nur dann ein zulässiges Koordinatensystem gibt, in dem die beiden Punkte den gleichen Wert der Zeitkoordinate haben. (Vgl. Reichenbach, Philosophie der Raum-Zeit-Lehre, Berlin 1928, S. 171).

D 6. $\mathbf{Glz} =_{\mathrm{Df}} \hat{x}\, \hat{y}\, (x, y \in \mathbf{wp} \,.\, x \dot{-} \mathbf{W} \dot{-} \breve{\mathbf{W}}\, y)$

Benutzen wir die (Minkowskische) Darstellung mit Hilfe des Doppelkegels der Signale (s. Abb. 10), so ist $\overrightarrow{\mathbf{W}}‘x$ der Vorkegel, $\overleftarrow{\mathbf{W}}‘x$ der Nachkegel von x; das ganze „Zwischengebiet“ zwischen den beiden Kegeln ist mit x gleichzeitig: $\overrightarrow{\mathbf{Glz}}‘x$. Auf einer nicht durch x gehenden Weltlinie (γ) liegt also nicht nur éin zu x gleichzeitiger Weltpunkt, sondern eine ganze Strecke von solchen (Abb. 10: $\gamma \cap \overrightarrow{\mathbf{Glz}}‘x$).

Eine „Raumklasse“ (oder „Raum“) ist ein dreidimensionaler Querschnitt quer zur Zeitrichtung durch die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt. Eine Raumklasse kann definiert werden als eine Klasse von untereinander gleichzeitigen Weltpunkten, die mit jeder Weltlinie (mindestens) einen Punkt gemein hat:

D 7. $\mathbf{raum} =_{\mathrm{Df}} \hat{\delta} \{\delta \uparrow \delta \subset \mathbf{Glz} :.\, (\beta) : \beta \in \mathbf{wl} \,.\supset .\, \exists\, ! \, \delta \cap \beta\}$

Die weiteren Axiome (A 13 bis 19) seien hier nicht angegeben.

Sie besagen u. a. das Bestehen einer gewissen Verbindung unter den Weltlinien, die Endlichkeit der Grenzgeschwindigkeit der Signale und die Stetigkeit der **Z**-Reihen. Mit Hilfe dieser Axiome läßt sich ableiten, daß es für jeden Weltpunkt mindestens eine Raumklasse gibt.

Die Begriffe der (topologisch-)räumlichen Ordnung innerhalb eines Raumes δ können abgeleitet werden mit Hilfe des Begriffes der „Wirkungsbereiche". α heißt „der Wirkungsbereich in δ von x" (**Wber**$_\delta$'x), wenn α der Durchschnitt des Raumes δ mit dem Nachkegel von x ist. α umfaßt die von x aus durch Signale erreichbaren Weltpunkte von δ (Abb. 10).

D 8. $\mathbf{Wber}_\delta =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha}\hat{x}\{\delta \in \mathbf{raum} \,.\, x\,\mathbf{Z}|\in\delta \,.\, \alpha = \delta \cap \overleftarrow{\mathbf{W}}{}'x\}$

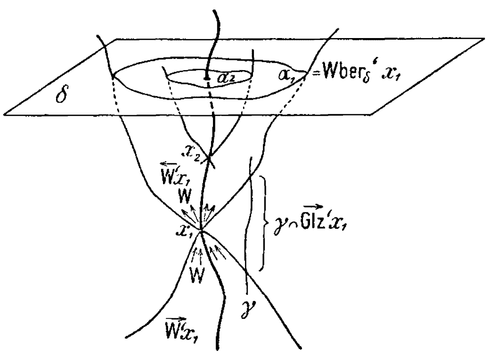


Abb. 10. Die Wirkungsbereiche

Diese Wirkungsbereiche sind zusammenhängende Raumteile; an jeder Stelle sind sie mit beliebig kleinem oder großem Umfange vorhanden. Wir können sie als „Umgebungen" ihrer Punkte ansehen:

D 9. $\mathbf{umg}_\delta =_{\mathrm{Df}} \mathrm{D}'\,\mathbf{Wber}_\delta$

Es läßt sich dann zeigen, daß diese Umgebungssysteme das Hausdorffsche AS erfüllen (**33**, D 11):

Lehrsatz: $(\delta) \,.\, (\mathbf{umg}_\delta \upharpoonright \breve{\in}) \in \mathrm{hausd}$

Daher kann die ganze Topologie des Raumes mit Hilfe der abgeleiteten Begriffe, schließlich also auf Grund von **K** und **Z** allein, ausgedrückt werden. Als Beispiel einer topologischen Eigen-

schaft nehmen wir die homogene Dreidimensionalität, die durch ein weiteres Axiom von jeder Raumklasse ausgesagt wird:

A 20. $(\delta) . \mathsf{Dzhom}(3, \delta, \mathbf{umg}_\delta \upharpoonleft \breve{\epsilon})$ (vgl. **33 c**, D 19)

36 b. Zweite Form: **W**-System. (Lesbar nach **27**.)

Andere Formen des Systems der Raum-Zeit-Topologie ergeben sich bei anderer Wahl der Grundbegriffe. Es sei hier nur auf zwei andere Formen hingewiesen, die besonderes erkenntnistheoretisches Interesse besitzen (vgl. Carnap, a. a. O., S. 344). Bei beiden fällt die Relation **K** fort: koinzidierende Weltpunkte werden als identisch angesehen. Die erste Variante nimmt die Klasse **wlin** der Eigenzeitrelationen als einzigen Grundbegriff, die vorhin als abgeleiteter Begriff auftrat (D 4); hier wird dann **Z** als abgeleiteter Begriff definiert ($\dot{\mathbf{s}}$'**wlin**). Bei dieser Systemform tritt besonders deutlich hervor, daß die Axiome des Systems topologische Eigenschaften der Zeitordnung aussprechen, trotzdem aber auch die Beschaffenheit der Raumordnung abzuleiten gestatten.

Die zweite Variante nimmt die Wirkungsbeziehung **W** als einzigen Grundbegriff. Hier treten die Begriffe Koinzidenz, Eigenzeit, Genidentität, Weltlinie überhaupt nicht auf. Darin liegt ein Vorzug dieses Systems, da der Begriff der Genidentität in manchen Fällen (z. B. im materiefreien elektromagnetischen Feld) problematisch wird.

Die ersten Axiome besagen, daß **W** transitiv, irreflexiv, dicht, ohne Anfangs- und Endglied ist:

A 1. $\mathbf{W} \in \mathsf{trans}$ A 2. $\mathbf{W} \in \mathsf{irr}$ A 3. $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}^2$

A 4. $\mathsf{D}'\mathbf{W} \subset \text{Ɑ}'\mathbf{W}$ A 5. $\text{Ɑ}'\mathbf{W} \subset \mathsf{D}'\mathbf{W}$

Die Weltpunkte: D 1. $\mathbf{wp} =_{\mathrm{Df}} \mathsf{C}'\mathbf{W}$

Die „Wirkungslinien“ sind die umfassendsten Reihen, die Teilrelationen von **W** sind:

D 2. $\mathbf{wlin} =_{\mathrm{Df}} \hat{R}\{R \in \mathsf{ser} . R \subseteq \mathbf{W} :. (P) : P \in \mathsf{ser} . P \subseteq \mathbf{W} . R \subseteq P . \supset . R = P\}$

Gleichzeitigkeit (wie vorhin): D 3. $\mathbf{Glz} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{wp} \uparrow \mathbf{wp} \dot{-} \mathbf{W} \dot{-} \breve{\mathbf{W}}$

Die Definitionen für **raum**, $\mathbf{Wber}_\delta$, $\mathbf{umg}_\delta$ sind analog den

früheren; nur treten an Stelle der Weltlinien die Wirkungslinien; z. B.:

D 4. $\mathbf{raum} =_{\mathrm{Df}} \hat{\delta} \{\delta \uparrow \delta \Subset \mathbf{Glz} :. (R) : R \in \mathbf{wilin} . \supset . \exists ! \delta \cap \mathrm{C}`R\}$

Die weiteren Axiome (A 6 bis 12) sind analog denen des **K**-**Z**-Systems; das Axiom der Dreidimensionalität des Raumes lautet wie vorher:

A 13. $(\delta) : \delta \in \mathbf{raum} . \supset . \mathrm{Dzhom}(3, \delta, \mathbf{umg}_\delta \uparrow \breve{\epsilon})$

Formen wir A 13 mit Hilfe der gegebenen Definitionen um, so erhalten wir eine Aussage, die **W** als einzige nichtlogische Konstante enthält:

$$(\delta) ::: \delta \subset \mathrm{C}`\mathbf{W} . \delta \uparrow \delta \Subset \dot{-} \mathbf{W} \dot{-} \breve{\mathbf{W}} ::. (R) :: R \in \mathrm{ser} . R \Subset W :. (P) : P \in \mathrm{ser} . P \Subset W . R \Subset P . \supset . R = P :. \supset . \exists ! \delta \cap \mathrm{C}`R ::. \supset . \mathrm{Dzhom}(3, \delta, \hat{\alpha} \{(\exists x) . x \mathbf{W} | \in \delta . \alpha = \delta \cap \overleftarrow{\mathbf{W}}`x\} \uparrow \breve{\epsilon})$$

Wie die Dreidimensionalität, so erweist sich auch jede andere topologische Eigenschaft des Raumes in solcher Weise als formale Eigenschaft des Relationsgefüges der Wirkungsbeziehung. Ergebnis: der Raum ist die durch die Wirkungsbeziehung bestimmte Ordnung innerhalb des Gleichzeitigen.

37. Determination und Kausalität

37 a. Allgemeiner Begriff der Determination. (Lesbar nach 22).

Zwei Grundbegriffe: 1. Die Klasse **zgr** der Zustandsgrößen; jede Zustandsgröße ist eine einmehrdeutige Relation zwischen den Größenwerten (Zahlen oder auch Qualitäten) und den „Stellen“ (z. B. eines Raumgebietes oder einer Zeitreihe);

2. die Klasse **lg** der (z. B. räumlichen oder zeitlichen) Lagerelationen, auf denen die Ordnung der Stellen beruht.

Die Stellen: D 1. $\mathbf{st} =_{\mathrm{Df}} \mathrm{s}`\mathrm{C}``\mathbf{lg}$

A 1. $\mathbf{zgr} \subset 1 \rightarrow \mathrm{cls}$ A 2. $\mathrm{G}``\mathbf{zgr} \subset \mathrm{Cl}`\mathbf{st}$

„$\mathbf{Lkorr}(R, \alpha, \beta)$“: R ist ein Lagekorrelator zwischen den Stellenklassen α und β; d. h. R ist eine eineindeutige Zuordnung zwischen α und β, durch die eine Isomorphie in bezug auf die Lagerelationen hergestellt wird:

D 2. $\mathbf{Lkorr} =_{Df} \hat{R}\hat{\alpha}\hat{\beta}\{\alpha,\beta \in \mathrm{Cl}`\mathbf{st} \,.\, \mathrm{D}`R = \alpha \,.\, \mathrm{Q}`R = \beta :.\, (S) : S \in \mathbf{lg} \,.\supset.\, R \,;\, (S \upharpoonright \alpha) = S \upharpoonright \beta\}$

Ein Lagekorrelator R zwischen α und β heißt ein „Zustandsgrößenkorrelator zwischen α und β in bezug auf die Klasse λ von Zustandsgrößen", wenn jede Zustandsgröße von λ in je zwei (in bezug auf R) korrespondierenden Stellen denselben Wert hat:

$\mathbf{Zkorr}\,(R, \alpha, \beta, \lambda)$.

D 3. $\mathbf{Zkorr} =_{Df} \hat{R}\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\lambda}\{\mathbf{Lkorr}\,(R,\alpha,\beta) \,.\, \lambda \subset \mathbf{zgr} :.\, (T) : T \in \lambda \,.\supset.\, T \,;\, R \subseteq I\}$

„$\mathbf{Det}\,(\alpha, x, \lambda)$": die Stellenklasse α ist „determinierende Klasse" der Stelle x in bezug auf die Klasse λ von Zustandsgrößen; das soll bedeuten: die Werte dieser Zustandsgrößen in x sind bestimmt durch die Werte in α (genauer: die Werte in x stimmen mit den Werten in einem beliebigen y überein, wenn y zu einer Stellenklasse β dieselben Lagerelationen hat, wie x zu α, und wenn der Lagekorrelator zugleich Zustandsgrößenkorrelator zwischen α und β ist):

D 4. $\mathbf{Det} =_{Df} \hat{\alpha}\hat{x}\hat{\lambda}\{\alpha \subset \mathbf{st} \,.\, x \in \mathbf{st} - \alpha :.\, (\beta, y, R, T) : \mathbf{Lkorr}\,(R, \alpha \cup [x], \beta \cup [y]) \,.\, x R y \,.\, \mathbf{Zkorr}\,(\alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta, \alpha, \beta, \lambda) \,.\, T \in \lambda \,.\supset.\, T`x = T`y\}$

37 b. (Lesbar nach **24**; dazu **36**.) Physikalisches Kausalitätsprinzip: Es gibt eine endliche Klasse λ von Zustandsgrößen derart, daß für jeden Weltpunkt x ein beliebiger räumlicher Querschnitt durch den Vorkegel oder den Nachkegel von x determinierende Klasse von x in bezug auf λ ist.

Diesen Satz können wir ausdrücken mit Hilfe der Grundrelation $\mathbf{W}$ von **36 b** (oder **36 a**, D 5); $\mathbf{lg}$ sind dann die durch $\mathbf{W}$ ausdrückbaren räumlichen Relationen, insbesondere $\mathbf{umg}_\delta$:

Kausalitätsprinzip: $(\exists \lambda) :.\, \lambda \in \mathrm{cls\ induct} :.\, (\alpha, x, \delta) : \delta \in \mathbf{raum} \,.\, x \in \mathbf{wp} - \delta \,.\, \alpha = \delta \cap (\overrightarrow{\mathbf{W}}`x \cup \overleftarrow{\mathbf{W}}`x) \,.\supset.\, \mathbf{Det}\,(\alpha, x, \lambda)$

Hiermit ist gezeigt, daß das physikalische Kausalitätsprinzip ausdrückbar ist ohne Benutzung des Begriffes des „Bewirkens" oder „Verursachens"; das Prinzip geht zurück einerseits auf die

Grundbegriffe der Raum-Zeit-Topologie (**36**), andererseits auf den allgemeinen Begriff der Determination, der seinerseits (**37 a**) abgeleitet wird aus den allgemeinen Begriffen „Zustandsgröße" und „Lagerelation" (die nicht notwendig physikalisch gedeutet werden müssen, sondern auf ein beliebiges Gebiet angewendet werden können).

Eine Berücksichtigung des Umstandes, daß in der Physik die Lagerelationen und die Determinationsrelation (**Det**) kontinuierlichen Charakter haben, führt dann von dem angegebenen Kausalitätsprinzip zur Form der Differentialgleichung als dem konkreten Ausdruck der Determination.

D. Verwandtschaftslehre

38. AS der Verwandtschaftsbeziehungen unter Menschen

(Lesbar nach **23**)

38 a. Die biologischen Begriffe.

Zwei Grundbegriffe: 1. $\mathbf{Zg}\,(x, y, z)$: x (Mann) und y (Weib) haben z gezeugt; 2. $\mathbf{ml}$: die männlichen Menschen.

(Andere Möglichkeiten der Auswahl der Grundbegriffe: **44**, Üb.-Aufg. 24, 25, S. 102.)

Die Menschen: D 1. $\mathbf{me} =_{\mathrm{Df}} C'\mathbf{Zg}$

Weiblich: D 2. $\mathbf{wl} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{me} - \mathbf{ml}$

Vater: D 3. $\mathbf{Va} =_{\mathrm{Df}} {}^{2}\mathbf{Zg}$; Mutter: D 4. $\mathbf{Mu} =_{\mathrm{Df}} {}^{1}\mathbf{Zg}$

Elter: D 5. $\mathbf{Elt} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{Va} \cup \mathbf{Mu}$; Kind: D 6. $\mathbf{Ki} =_{\mathrm{Df}} \breve{\mathbf{Elt}}$

Vorfahre: D 7. $\mathbf{Vf} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{Elt}_{\mathrm{po}}$; Nachkomme: D 8. $\mathbf{Nk} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{Ki}_{\mathrm{po}}$

A 1. $D'\mathbf{Va} \subset \mathbf{ml}$ A 2. $D'\mathbf{Mu} \subset \mathbf{wl}$

A 3. $\mathbf{Va} \in 1 \rightarrow \mathrm{cls}$ A 4. $\mathbf{Mu} \in 1 \rightarrow \mathrm{cls}$

A 5. $\mathbf{Vf} \in \mathrm{irr}$ Aus A 5 folgt die Irreflexivität und Asymmetrie von **Va**, **Mu**, **Elt**, **Ki**, **So**, **To** und den Potenzen (Großvater, Enkel usw.).

Sohn: D 9. $\mathbf{So} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{ml} \upharpoonleft \mathbf{Ki}$; Tochter: D 10. $\mathbf{To} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{wl} \upharpoonleft \mathbf{Ki}$

Bruder: D 11. $\mathbf{Br} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{So} \,|\, \mathbf{Va} \;\dot{\cap}\; \mathbf{So} \,|\, \mathbf{Mu} \;\dot{-}\; I$

Schwester: D 12. $\mathbf{Sw} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{To} \,|\, \mathbf{Va} \;\dot{\cap}\; \mathbf{To} \,|\, \mathbf{Mu} \;\dot{-}\; I$

Geschwister: D 13. $\mathbf{Geschw} =_{\mathrm{Df}} \mathbf{Br} \;\dot{\cup}\; \mathbf{Sw}$

Gatte (im biologischen Sinne; vgl. **38 b**: **Eh**):

D 14. $\mathbf{Ga} =_{\mathrm{Df}} {}^{3}\mathbf{Zg}$ (oder: $\mathbf{Va} \,|\, \breve{\mathbf{Mu}}$)

Beispiele einiger weiterer Begriffe:

Großvater: $\mathbf{Va} \mid \mathbf{Elt}$; Vetter: $\mathbf{So} \mid \mathbf{Geschw} \mid \mathbf{Elt}$; Enkel: $\mathbf{So} \mid \mathbf{Ki}$; Stiefbruder: $\mathbf{So} \mid \mathbf{Elt} \dot{-} \mathbf{Br} \dot{-} I$.

38 b. Die juristischen Begriffe.

Neuer Grundbegriff: **Eh** (gesetzlicher) Ehemann.

A 6. $D'\mathbf{Eh} \subset \mathbf{ml}$ A 7. $\mathfrak{D}'\mathbf{Eh} \subset \mathbf{wl}$

Aus A 6, 7 folgt: $\mathbf{Eh} \in \mathbf{irr}$

Eheschließungsverbote: A 8. $\mathbf{Va} \dot{\subset} \dot{-} \mathbf{Eh}$

A 9. $\mathbf{So} \dot{\subset} \dot{-} \mathbf{Eh}$ A 10. $\mathbf{Br} \dot{\subset} \dot{-} \mathbf{Eh}$

(Das Bigamieverbot kann hier nicht ausgedrückt werden, da es Zeitbegriffe erfordert; vgl. **44**, Üb.-Aufg. 26, S. 103.)

Ehefrau: D 15. $\mathbf{Ehf} =_{Df} \breve{\mathbf{Eh}}$

Ehegatte (Mann oder Frau): D 16. $\mathbf{Ehg} =_{Df} \mathbf{Eh} \dot{\cup} \breve{\mathbf{Eh}}$

Schwager: D 17. $\mathbf{Schwa} =_{Df} \mathbf{Br} \mid \mathbf{Ehg} \dot{\cup} \mathbf{Eh} \mid \mathbf{Sw}$

Schwägerin: D 18. $\mathbf{Schwae} =_{Df} \mathbf{Sw} \mid \mathbf{Ehg} \dot{\cup} \mathbf{Ehf} \mid \mathbf{Br}$

Onkel: D 19. $\mathbf{On} =_{Df} (\mathbf{Br} \dot{\cup} \mathbf{Schwa}) \mid \mathbf{Elt}$

Tante: D 20. $\mathbf{Ta} =_{Df} (\mathbf{Sw} \dot{\cup} \mathbf{Schwae}) \mid \mathbf{Elt}$

Beispiele weiterer Begriffe:

Schwiegersohn: $\mathbf{Eh} \mid \mathbf{To}$; Schwiegervater: $\mathbf{Va} \mid \mathbf{Ehg}$; Stiefvater: $\mathbf{Eh} \mid \mathbf{Mu} \dot{-} \mathbf{Va}$; Stiefsohn: $\mathbf{So} \mid \mathbf{Ehg} \dot{-} \mathbf{So}$; Neffe: $\mathbf{ml} \upharpoonleft (\breve{\mathbf{On}} \dot{\cup} \breve{\mathbf{Ta}})$.

E. Erkenntnisanalyse

39. Die untersten Stufen des Konstitutionssystems

(Lesbar nach **23**; dazu **33**)

(Im Anschluß an: Carnap [Aufbau], § 108ff.)

Das „Konstitutionssystem" ist ein definitorischer Stammbaum der Begriffe. Auf Grund weniger Grundbegriffe (vielleicht nur éines) können, wie die Konstitutionstheorie zeigt, alle Begriffe der Wissenschaft konstituiert werden, und zwar in der Reihenfolge: eigenpsychische, physische, fremdpsychische, geistige (kulturelle) Begriffe.

Nehmen wir als einzigen Grundbegriff die „Ähnlichkeitserinnerung" (**Er**) zwischen Erlebnissen (**erl**), so können die untersten Definitionsstufen etwa wie folgt aufgebaut werden. (Nähere Erläuterung ist hier nicht möglich, vgl. die angegebene Stelle.)

Grundbegriff: **Er**; „x **Er** y": die Erlebnisse x und y enthalten

einen ähnlichen, d. h. annähernd übereinstimmenden Bestandteil, die Erinnerung von x ist mit y gegeben.

Die Erlebnisse: D 1. $\mathbf{erl} =_{Df} C`\mathbf{Er}$

Die „Teilähnlichkeit" zwischen Erlebnissen (Vorkommen ähnlicher Bestandteile): D 2. $\mathbf{Ae} =_{Df} \mathbf{Er} \cup \breve{\mathbf{Er}} \cup \mathbf{Er}^0$

Ae ist eine Ähnlichkeit (**20a**): $\mathbf{Ae} \in \mathrm{sim}$

Die „Ähnlichkeitskreise": D 3. $\mathbf{ähnl} =_{Df} \mathrm{sim}`\mathbf{Ae}$

Ein Ähnlichkeitskreis ist eine größtmögliche Klasse von Erlebnissen, die alle untereinander teilähnlich sind.

Die Sinnesqualitäten:

D 4. $\mathbf{qual} =_{Df} \hat{\alpha}\{(\gamma) : \gamma \in \mathbf{ähnl} \,.\, \mathrm{Nc}`(\alpha \cap \gamma) \,/\, \mathrm{Nc}`\alpha > 1/2 \,.\, \supset .\, \alpha \subset \gamma :.$ $(x) \,.\, x \sim \in \alpha \,.\, \supset .\, (\exists \delta) \,.\, \delta \in \mathbf{ähnl} \,.\, \alpha \subset \delta \,.\, x \sim \in \delta\}$

Die Definition besagt: α gehört zu **qual**, wenn α in jedem Ähnlichkeitskreis, in dem α mindestens zur Hälfte enthalten ist, ganz enthalten ist, und wenn α von jedem nicht zu ihm gehörenden x durch einen Ähnlichkeitskreis getrennt werden kann. Dadurch sind die Klassen **qual** definiert als die größten Klassen von Erlebnissen, die bei der Zerschneidung der Ähnlichkeitskreise durch gegenseitige teilweise Überdeckung unzerteilt bleiben (abgesehen von der Abspaltung geringfügiger Teile). Somit gehört α zu **qual**, wenn α eine Klasse von Erlebnissen ist, die einen bestimmten Bestandteil gemein haben. α dient dann als Repräsentant dieses Bestandteiles (Quasianalyse, vgl. **20**). Die **qual** sind also die Sinnesqualitäten (einschließlich sonstiger psychischer Elementarqualitäten).

Die „Teilgleichheit" zwischen Erlebnissen (Übereinstimmung in einem Bestandteil) wird definiert als Vorkommen in derselben **qual**-Klasse:

D 5. $\mathbf{Gl} =_{Df} \in \upharpoonright \mathbf{qual} \mid \breve{\in}$

Zwei Qualitäten heißen „ähnlich", wenn jedes Erlebnis der einen zu jedem der andern teilähnlich ist:

D 6. $\mathbf{Aq} =_{Df} \hat{\alpha}\hat{\beta}\{\alpha, \beta \in \mathbf{qual} \,.\, \alpha \uparrow \beta \subset \mathbf{Ae}\}$

Die „Sinnesklassen", d. h. die Klassen von Qualitäten desselben Sinnesgebietes, sind die größtmöglichen Klassen von Qualitäten, die miteinander durch eine Ähnlichkeits-(**Aq**-)Kette verbunden werden können; sie sind daher zu definieren als die Abstraktionsklassen der **Aq**-Kette: D 7. $\mathbf{sinn} =_{Df} \mathrm{Aeq}`\mathbf{Aq}_{\mathrm{po}}$.

Die Qualitäten des Gesichtssinnes haben (bei einer gewissen Betrachtungsweise) eine fünfdimensionale Ordnung in bezug auf die Ähnlichkeit **Aq** (zweidimensionale Ordnung der Sehfeldstellen, dreidimensionale der Farben), während die Ordnungen der anderen Sinnesgebiete kleinere Dimensionszahlen haben. Daher kann der Gesichtssinn definitorisch gekennzeichnet („konstituiert") werden als die Klasse derjenigen Qualitäten, in denen eine Sinnesklasse die Dimensionszahl 5 in bezug auf **Aq** hat:

D 8. $\mathbf{gesicht} =_{\mathrm{Df}} \hat{\alpha}\{(\exists \lambda) \,.\, \lambda \in \mathbf{sinn} \,.\, \mathrm{Dzp}\,(5, \lambda, \alpha, \mathrm{Umgr}`\mathbf{Aq})\}$

(Dzp und Umgr sind rein logische Begriffe der Topologie: **33**, D 17, D 13.)

Verstehen wir unter einer „Empfindung" einen individuellen Erlebnisbestandteil, d. h. einen solchen, der nicht nur durch seine Qualität, sondern auch noch durch sein Vorkommen in einem bestimmten Erlebnis gekennzeichnet ist, so sind die Empfindungen zu definieren als die geordneten Paare aus einem Erlebnis und einer Qualität, zu der das Erlebnis gehört:

D 9. $\mathbf{emp} =_{\mathrm{Df}} \hat{Q}\,\{(\exists x, \alpha) \,.\, \alpha \in \mathbf{qual} \,.\, x \in \alpha \,.\, Q = x \downarrow \alpha\}$

Eine Sehfeldstelle wird repräsentiert durch eine Klasse von Qualitäten des Gesichtssinnes, die in der Sehfeldstelle übereinstimmen; eine Farbe durch eine Klasse von Qualitäten des Gesichtssinnes, die in der Farbe übereinstimmen. Beide Begriffe lassen sich aus den bisher definierten ableiten. Es läßt sich zeigen, daß dann weiter ohne Verwendung neuer Grundbegriffe alle übrigen Begriffe des Eigenpsychischen konstituierbar (durch Kettendefinitionen ableitbar) sind; und weiterhin dann auch die des Physischen, des Fremdpsychischen und des Geistigen.

F. Sprachanalyse

40. Logische Semasiologie einer bestimmten Sprache

(Lesbar nach **14**)

Feststellung der verschiedenen Bedeutungen der „logischen Partikel" einer bestimmten Sprache (z. B. der deutschen), d. h. derjenigen Worte und Wendungen, die dazu dienen, die logischen Verhältnisse auszudrücken. Hier nur drei Beispiele: „ein", „der", „und".

40 a. Der unbestimmte Artikel.

1. $(\exists x) . \varphi x$ (Existenz); z. B. „ein Hund hat mich gebissen".
2. $(x) . \varphi x$ (Allgemeinheit); z. B. „eine Influenzmaschine besteht aus . . . .".
3. $x \in \alpha$ (Prädikat); z. B. „Sokrates ist ein Grieche".
4. $x \in \overrightarrow{R}\text{‘}y$ oder $x R y$ (Prädikat in Form einer kennzeichnenden Funktion); z. B. „**a** ist ein Sohn von **b**".

40 b. Der bestimmte Artikel im Singular.

1. $(\imath x)(\varphi x)$ (Kennzeichnung); z. B. „der Mann, den wir gesehen haben, ...".
2. $R\text{‘}y$ (Kennzeichnung; Artikel vor einem Relationswort); z. B. „der Vater des Herrn A . . . .".
3. **a** (vor Eigennamen); z. B. „der Mond", „die Renaissance", „der Gesichtssinn".
4. $(x) . \varphi x$ (Allgemeinheit); z. B. „der Löwe ist ein Raubtier".
5. $(x) : x R \mathbf{a} . \supset . . . . .$ (Allgemeinheit in einer Kennzeichnung; Artikel vor einem Relationswort); z. B. „der Besucher dieser Gegend . . . .", „der Finder einer Sache ist verpflichtet, . . . "
6. $(\exists x) . \varphi x$ (Existenz); z. B. „er erhob die Hand".
7. $(\exists x) . x R \mathbf{a}$ (Existenz in einer scheinbaren Kennzeichnung); z. B. „der Großvater des Herrn A (von dem vorher nicht die Rede gewesen ist) hat schon . . . .".

40 c. „und".

1. $p . q$ (Konjunktion); z. B. „a sitzt und b steht".
2. $\varphi x . \varphi y$ (Konjunktion, ohne Wiederholung des gemeinsamen Bestandteils); z. B. „**a** und **b** sitzen", „ich sitze und lese".
3. $(x) :. \varphi x . \vee . \psi x : \supset . . . . .$ (Disjunktion von Funktionen); z. B. „die ordentlichen und die außerordentlichen Mitglieder haben das Recht, ...".
4. $\alpha \cup \beta$ (Vereinigung); z. B. „die ordentlichen und die außerordentlichen Mitglieder sind zusammengekommen".
5. $\alpha \cap \beta$ (Durchschnitt); z. B. „die verlorenen und nicht wiedergefundenen Gegenstände . . . .".

41. Aufstellung des logischen Skeletts vorgelegter Sätze

(Lesbar nach **18**, teilweise nach **15**)

Das „logische Skelett" eines Satzes bezeichnet seine logische Aufbauform, unter Absehung von der Bedeutung der

vorkommenden nichtlogischen Begriffe. Das logische Skelett eines bestimmten Satzes könnte etwa dadurch hergestellt werden, daß in dem Satz jeder nichtlogische Begriff durch eine Variable ersetzt wird; so ergäbe z. B. der Satz „ich sehe dich", in logistischer Sprache: „**a Sehen b**", die Form: $x R y$.

Um in der Darstellung des Skeletts noch den ursprünglichen Satz leichter erkennen zu können, wollen wir die nichtlogischen Begriffe nicht durch Variable ersetzen, sondern in Klammern schließen, und zwar je nach Bedarf Individuen, Funktionen, Klassen, Relationen, auch ganze Sätze. Die Funktionen können wir immer extensional darstellen (vgl. Extensionalitätsthese, **9 e**), so daß wir nur mit Individuen, Klassen, Relationen, Sätzen zu tun haben. Zur leichteren Übersicht, und um für die logischen Verknüpfungen die logistischen Zeichen verwenden zu können, kennzeichnen wir Klassenausdrücke durch ⟨], Ausdrücke zweistelliger Relationen durch ⟨ ⟩, Ausdrücke mehrstelliger Relationen durch [⟩; (im ersten Fall weist die Spitze auf das davorstehende Element, im zweiten Fall die beiden Spitzen auf die vorn und hinten stehenden Glieder, im dritten Fall weist die Spitze auf die dahinter stehende Klammer mit den Argumenten). Hierbei wollen wir die Klasse in der Regel durch ein Substantiv im Plural oder durch ein Adjektiv bezeichnen; die Relation durch ein Verbum (im Infinitiv) oder ein Relationssubstantiv (ohne „von", „zu") oder einen Komparativ (ohne „als"); bei mehrstelligen Relationen charakterisieren wir die Argumentstellen zuweilen durch darüberstehende Worte, besonders Präpositionen; z. B.: „**a** ∈ ⟨rot]", „Sokrates ∈ ⟨Griechen]", „ich ⟨sehen⟩ du", „Odysseus ⟨Vater⟩ Telemachos",

Zeit: von: nach:
[reisen⟩ (ich, gestern, Berlin, Wien).

Die logische Analyse kann schrittweise vorgenommen werden, indem zunächst größere Bestandteile einfach in Klammer gesetzt, später dann weiter zerlegt werden. Hier einige Beispiele allgemeinen Charakters; Fälle, in denen Maßzahlen, Ort und Zeit auftreten, werden nachher erörtert (**42**, **43**).

1. Beispiel. (Lesbar nach **15**.)

1. Wer Pech angreift, besudelt sich.
2. $(x) : (x \text{ greift Pech an}) . \supset . (x \text{ besudelt sich})$.

3. $(x) : x \, \langle \text{angreifen} \rangle \, \text{Pech} \, . \supset . \, x \, \langle \text{besudeln} \rangle \, x.$

4. $\mathrm{I} \upharpoonright \overrightarrow{\langle \text{angreifen} \rangle}\text{‘Pech} \in \langle \text{besudeln} \rangle.$

2. Beispiel. (Lesbar nach **16.**)

1. Ich habe denselben Lehrer wie du.

Zwei Bedeutungen: a) dieser Satz soll auch besagen, daß jeder von uns nur éinen Lehrer hat;
b) dieser Satz soll das nicht besagen.

2 a. $\langle \text{Lehrer} \rangle \text{‘ich} = \langle \text{Lehrer} \rangle \text{‘du}.$

2 b. $(\exists \, x) \, . \, (x \text{ ist Lehrer von mir}) \, . \, (x \text{ ist Lehrer von dir}).$

3 b. $(\exists \, x) \, . \, x \langle \text{Lehrer} \rangle \text{ich} \, . \, x \, \langle \text{Lehrer} \rangle \text{ du}.$

4 b. $\text{ich } \breve{\langle \text{Lehrer} \rangle} \,|\, \langle \text{Lehrer} \rangle \text{ du}.$

3. Beispiel. (Lesbar nach **18.**)

a. 1. Die Farben der von a an b geschickten Muster stimmen teilweise mit den von b gewünschten Farben überein.

2. $\exists ! \langle$die Farben der von a an b geschickten Muster$] \cap \langle$die von b gewünschten Farben$]$.

3. $\exists ! (\langle$Farbe$\rangle$“$\langle$die von a an b geschickten Muster$]) \cap \langle$Farben$] \cap \langle$von b gewünscht$]$.

an: was?

4. $\exists ! \{\langle \text{Farbe} \rangle “[\langle \text{Muster}] \cap \hat{x} \, ([\text{schicken} \rangle (\text{a}, \; \text{b}, \; x \;))]\} \cap \mathrm{D}‘\langle \text{Farbe} \rangle \cap \langle \text{von b gewünscht}].$

Der Ausdruck „D‘⟨Farbe⟩“ kann gestrichen werden, weil der vorhergehende Ausdruck eine Teilklasse davon ist:

5. $\exists ! \{\langle \text{Farbe} \rangle “[\langle \text{Muster}] \cap \overrightarrow{[\text{schicken} \rangle^{312}} \, ‘(\text{a}, \, \text{b})]\} \cap \overleftarrow{\langle \text{wünschen} \rangle} \, ‘\text{b}$

b. 1. Diese Farben stimmen n u r teilweise mit jenen überein.

2. $\exists ! \langle$diese Farben$] \cap \langle$ jene Farben$]$. $\sim (\langle$diese Farben$] \subset \langle$ jene Farben$])$.

3. $\langle$diese Farben$] \dot{-} \mathrm{Fr} \langle$jene Farben$]$. $\langle$diese Farben$] \dot{-} \subset \langle$jene Farben$]$.

4. $\langle$diese Farben$] \dot{-} \mathrm{Fr} \dot{-} \subset \langle$jene Farben$]$.

4. Beispiel. (Lesbar nach **18.**)

1. Wenn dein Bruder ein mathematisches Buch von mir geholt hat, gibt er és dir.

2. (dein Bruder hat ein mathematisches Buch von mir geholt) $.\supset.$ (er gibt es dir).

3. (dein Bruder) ⟨geholt haben⟩ (ein mathematisches Buch von mir) $.\supset.$ [geben⟩ (er, du, es)
wem? was?

4. $(x):x \in$ ⟨meine mathematischen Bücher] . (dein Bruder) ⟨geholt haben⟩ $x .\supset.$ [geben⟩ (er, du, x).

5. $(x):x \in$ ⟨meine mathematischen Bücher] . ⟨Bruder⟩ ʻdu ⟨geholt haben⟩ $x .\supset.$ [geben⟩ (⟨Bruder⟩ ʻdu, du, x).

6. $(x):x \in$ ⟨$\overleftarrow{\text{haben}}$⟩ʻich $\cap$ ⟨mathematisch] $\cap$ ⟨Bücher] . ⟨Bruder⟩ ʻdu ⟨geholt haben⟩ $x .\supset.$ [geben⟩ (⟨Bruder⟩ ʻdu, du, x).

42. Maßzahlen

(Lesbar nach **19**, teilweise nach **14**.)

Maßzahlen sind logisch aufzufassen als Relationen zwischen Zahlen und Objekten (Dingen, Zuständen, Weltpunkten usw.). Die Relationen sind einmehrdeutig, geben also zur Bildung von Kennzeichnungen Anlaß.

1. Beispiel. (Lesbar nach **14**.)

1. Der Preis dieses Buches ist 3,50.
2. 3,50 ⟨Preis⟩ dieses Buch.
3. ⟨Preis⟩ʻdieses Buch = 3,50.

Die Maßeinheit gehört nicht zur Zahl, sondern zur Relation! Die Zusammenstellung „3,50 M" hat keinen Sinn; sondern „⟨Preis in M⟩ʻdieses Buch" ist die Kennzeichnung einer (reinen) Zahl, nämlich der Zahl $3\frac{1}{2}$. ⟨Preis in M⟩, ⟨Preis in fr⟩ sind verschiedene Relationen; wird als bekannt angenommen, welche dieser Relationen gemeint ist, so kann die Angabe der Maßeinheit fortgelassen werden.

2. Beispiel. (Lesbar nach **16**.)

1. Haben zwei Körper gleiches Gewicht, so ....
2. $(x, y):.(\exists n):n$ ⟨Gewicht⟩ $x . n$ ⟨Gewicht⟩ $y:\supset.$ ....
3. $(x, y):$ ⟨Gewicht⟩ ʻ$x =$ ⟨Gewicht⟩ ʻ$y .\supset$ ....

oder:

4. $(x, y):x$ ⟨$\breve{\text{Gewicht}}$⟩ | ⟨Gewicht⟩$y .\supset$ .....
5. ⟨$\breve{\text{Gewicht}}$⟩ | ⟨Gewicht⟩ $\subset$ ....

3. Beispiel. (Lesbar nach **14.**)

1. Diese Gasmenge hat in diesem Augenblick das Volumen 100.
2. $\langle\text{Volumen}\rangle\text{‘}\langle\text{jetziger Zustand}\rangle\text{‘}$ (diese Gasmenge) $= 100$.

4. Beispiel. (Lesbar nach **19.**)

1. Die Energie eines isolierten Systems bleibt konstant.
2. Die Energien beliebiger Zustände eines isolierten Systems stimmen überein.
3. $(\sigma, x, y) : \sigma \in \langle\text{isolierte Systeme}] \,.\, x, y \in \langle\text{Zustände von } \sigma] \,.\supset.$ (die Energien von x und y stimmen überein).
4. $(\sigma, x, y) : \sigma \in \langle\text{isolierte Systeme}] \,.\, x, y \in \langle\overrightarrow{\text{Zustand}}\rangle\text{‘}\sigma \,.\supset.$ $\langle\text{Energie}\rangle\text{‘}x = \langle\text{Energie}\rangle\text{‘}y$

oder ohne Variable:

5. $\langle\text{Energie}\rangle \mid \langle\text{Zustand}\rangle \upharpoonright \langle\text{isolierte Systeme}] \mid \breve{\langle\text{Zustand}\rangle} \mid \breve{\langle\text{Energie}\rangle} \subset I$
6. $(\langle\text{Energie}\rangle \mid \langle\text{Zustand}\rangle \upharpoonright \langle\text{isolierte Systeme}]) \in 1 \rightarrow \text{cls}$

43. Zustände und Vorgänge; Ort und Zeit

(Lesbar nach **19**, teilweise nach **10**)

43 a. Für die logistische Fassung nehmen wir einen zeitbestimmten (physischen oder psychischen) Gegenstand, auch einen Menschen, als Klasse (oder zeitliche Reihenrelation) seiner aufeinanderfolgenden Zustände. (Vgl. auch die Anwendung dieser Methode in Üb.-Aufg. 26 und 27.)

1. Beispiel. (Lesbar nach **11.**)

1. Als a starb, war b krank.
2. $(\exists x, y)$. (x ist ein Zustand von a, und zwar der Zustand des Sterbens). (y ist ein Zustand von b, und zwar ein Krankheitszustand). (x und y sind gleichzeitig).
3. $(\exists x, y) \,.\, x \in \text{a} \cap \langle\text{Tode}] \,.\, y \in \text{b} \cap \langle\text{Krankheitszustände}] \,.\, x$ $\langle\text{gleichzeitig}\rangle\, y$.

2. Beispiel. (Lesbar nach **14.**)

1. Dieser Körper hat eine höhere Temperatur als 1200° C gehabt.
2. $(\exists x)$. (x ist ein Zustand dieses Körpers). (die Temperatur von x ist höher als 1200° C). (der Zustand x ist vor dem jetzigen Zustand).

3. $(\exists\, x) . x \in \langle$dieser Körper$] . \langle$Temperatur in $^0\,$C$\rangle$ ‘$x > 1200 . x$ $\langle$früher$\rangle$jetzt. Wir können auch anstatt „$\overrightarrow{\langle \text{früher} \rangle}$ ‘jetzt“ immer schreiben: „$\langle$Vergangenheit$]$“:

4. $(\exists\, x) . x \in$ $\langle$dieser Körper$] \cap \langle$Vergangenheit$] . \langle$Temperatur$\rangle$ ‘$x > 1200$.

3. Beispiel. (Lesbar nach **19.**) (Vgl. **42**, 4. Beispiel.)

1. Die Energie eines isolierten Systems bleibt konstant.
2. $(\sigma, x, y) : \sigma \in \langle$isolierte Systeme$] . x, y \in \sigma . \supset . \langle$ Energie $\rangle$ ‘$x =$ $\langle$Energie$\rangle$ ‘y.
3. $(\langle$Energie$\rangle \mid \in \upharpoonright \langle$isolierte Systeme$])$ $\in 1 \rightarrow \mathrm{cls}$.

43 b. Ein Vorgang an einem (physischen oder psychischen) Gegenstand ist eine zeitlich zusammenhängende Klasse der Zustände des Gegenstandes, also eine Teilklasse des Gegenstandes.

4. Beispiel. (Lesbar nach **10.**)

1. a hat Typhus gehabt.
2. $(\exists\, \alpha) . (\alpha$ ist ein Vorgang an a$) . (\alpha$ ist ein Typhusvorgang$)$. $(\alpha$ ist in der Vergangenheit$)$.
3. $(\exists\, \alpha) . \alpha \subset \mathrm{a} . \alpha \in \langle$Typhusfälle$] . \alpha \subset \langle$Vergangenheit$]$
4. $\exists\, ! \langle$Typhusfälle$] \cap \mathrm{Cl}$‘ $(\mathrm{a} \cap \langle$Vergangenheit$])$.

43 c. (Lesbar nach **16.**) Einen bestimmten Zustand eines bestimmten physischen Gegenstandes fassen wir auf als Klasse von Raumzeitpunkten. Die einzelnen Raumzeitpunkte des Zustandes werden zuweilen mit Qualitäten oder Zahlen (Werten von Zustandsgrößen) belegt.

Ist ein Körper zu einer gewissen Zeit in einem gewissen geographischen Gebiet, so ist sein Zustand zu dieser Zeit eine Teilklasse des gleichzeitigen Zustandes dieses Gebietes.

5. Beispiel. 1. Humboldt ist in Amerika gewesen.

2. $(\exists\, \alpha, \beta) . (\alpha$ ist ein Zustand von Humboldt$) . (\beta$ ist ein Zustand von Amerika$) . (\alpha$ ist ein Teil von $\beta)$.
3. $(\exists\, \alpha, \beta) . \alpha \in \langle$Humboldt$] . \beta \in \langle$Amerika$] . \alpha \subset \beta$.
4. $\langle$Humboldt $]\breve{\in} \mid \subset \mid \in \langle$Amerika$]$.

6. Beispiel. 1. Herr a ist in Amerika gewesen.

Da Herr a noch lebt, so ist es hier (im Unterschied zum 5. Beispiel) von Bedeutung, anzugeben, daß der besagte Zustand in der Vergangenheit liegt:

2. $(\exists\, \alpha, \beta) \,.\, \alpha \in \mathrm{a} \cap \langle \text{Vergangenheit}] \,.\, \beta \in \langle \text{Amerika}] \,.\, \alpha \subset \beta$
3. $(\mathrm{a} \cap \langle \text{Vergangenheit}]) \,\breve{\in}\, | \subset | \in \langle \text{Amerika}]$.

7. Beispiel. 1. Ich habe noch nie einen so aufgeregten Menschen gesehen, wie dich gestern.

2. $(\exists\, \alpha, \beta) :.\, (\alpha$ ist ein Zustand von mir$) \,.\, (\beta$ ist ein Zustand von dir gestern$) \,.\, \alpha \,\langle \text{sehen} \rangle\, \beta :.\, (\gamma, \delta) : (\gamma$ ist ein Zustand von mir in der Vergangenheit$) \,.\, (\delta$ ist ein Zustand eines Menschen$) \,.\, \gamma \,\langle \text{sehen} \rangle\, \delta \,.\, \supset .\, (\delta$ ist nicht so aufgeregt wie $\beta)$.

3. $(\exists\, \alpha, \beta) :.\, \alpha \in \langle \text{ich}] \,.\, \beta \in \langle \text{du}] \cap \langle \text{gestern}] \,.\, \alpha \langle \text{sehen} \rangle \beta :.\, (\gamma, \delta) : \gamma \in \langle \text{ich}] \cap \langle \text{Vergangenheit}] \,.\, \delta \in | \in \langle \text{Menschen}] \,.\, \gamma \langle \text{sehen} \rangle \delta \,.\, \supset .\, \langle \text{Aufgeregtheit} \rangle ‘ \delta < \langle \text{Aufgeregtheit} \rangle ‘ \beta$.

8. Beispiel. 1. Als mein gebrochener Fuß noch nicht geheilt war, besuchte mich ein Freund aus Freiburg, der Arzt war.

2. $(\exists\, \alpha, \beta) \,.\, (\alpha$ ist ein Zustand von mir, mit gebrochenem, noch nicht geheiltem Fuß$) \,.\, (\beta$ ist ein Zustand eines Freundes aus Freiburg, der in diesem Zustand Arzt war$) \,.\, \beta \langle \text{besuchen} \rangle \alpha \,.\, \alpha \in \langle \text{Vergangenheit}]$.

3. $(\exists\, \alpha, \beta, \gamma) \,.\, \alpha \in \langle \text{ich}) \cap \langle \text{Vergangenheit}] \,.\, (\gamma$ ist ein Zustand eines gebrochenen, noch nicht geheilten Fußes$) \,.\, \gamma \subset \alpha \,.\, \beta \langle \text{Freund} \rangle \alpha \,.\, \beta \in \langle$die Zustände von$\langle$ die Einwohner von Freiburg$]] \,.\, \beta \in \langle$die Zustände von $\langle$die Ärzte$]] \,.\, \beta \langle \text{besuchen} \rangle \alpha$.

4. $(\exists\, \alpha, \beta, \gamma) \,.\, \alpha \in \langle \text{ich}] \cap \langle \text{Vergangenheit}] \,.\, \gamma \in | \in \langle \text{Füße}] \,.\, \gamma \in \langle \text{gebrochen}] - \langle \text{geheilt}] \,.\, \gamma \subset \alpha \,.\, \beta \langle \text{Freund} \rangle \mathbin{\dot{\cap}} \langle \text{besuchen} \rangle \alpha \,.\, \beta \in | \in \overrightarrow{\langle \text{Einwohner} \rangle} ‘ \text{Freiburg} \,.\, \beta \in | \in \langle \text{Ärzte}]$.

5. $(\exists\, \alpha, \beta) \,.\, \alpha \in \langle \text{ich}] \cap \langle \text{Vergangenheit}] \,.\, \exists !\, \mathrm{Cl} ‘ \alpha \cap \mathrm{s} ‘ \langle \text{Füße}] \cap \langle \text{gebrochen}] - \langle \text{geheilt}] \,.\, \beta \langle \text{Freund} \rangle \mathbin{\dot{\cap}} \langle \text{besuchen} \rangle \alpha \,.\, \beta \in (\mathrm{s} ‘ \overrightarrow{\langle \text{Einwohner} \rangle} ‘ \text{Freiburg} \cap \mathrm{s} ‘ \langle \text{Ärzte}])$.

Anhang

44. Übungsaufgaben

(„AS“ bedeutet: Axiomensystem)

Der Schwierigkeitsgrad jeder Aufgabe ist angegeben: [Schw. I] usw.: I sehr leicht, II leicht, III mittelschwierig, IV sehr schwierig.

A. Mengenlehre und Arithmetik

Üb.-Aufg. 1. AS der Mengenlehre nach J. v. Neumann[1]. Für $[x, y]$ setzen wir $R'y$. Grundrelation: **El** (wie in **31**). [Schw. IV]

Üb.-Aufg. 2. Definition der Mengenfunktion nach Fraenkel [Grundl.] 108ff.; vgl. **31**. Zunächst sind die einfachsten Funktionen zu definieren ([Grundl.] 110, Def. 4 a, 1. Teil); dann die Zusammensetzung von Funktionen (durch Paarbildung und Komposition); dann die Erweiterung eines Funktionsbereiches durch Zusammensetzung (**Erw**); dann der Bereich der Funktionen nullter Stufe ([Grundl.] 111) durch endlichmalige Erweiterung des Bereiches der einfachsten Funktionen (mit $\overrightarrow{\mathbf{Erw}}_*$). Es folgt die Aufstellung von Rekursionsformeln für die Funktionen n-ter Stufe, die Definition der Doppelfunktionen n-ter Stufe und der Aussonderung n-ter Stufe, alles auf Grund der $(n$-$1)$ten Stufe; dann die Definition der Stufenrelation (**Stu**) zwischen den Gebilden n-ter und $(n$-$1)$ter Stufe; schließlich die der Klasse der Funktionen beliebiger endlicher Stufe (mit Hilfe von $\overrightarrow{\mathbf{Stu}}_*$). [Schw. IV]

Es sei bemerkt, daß sich die Wichtigkeit des Funktionsbegriffs für die Mengenlehre immer deutlicher herausstellt (vgl. auch [1]), sodaß eine scharfe Definition dieses Begriffes den wesentlichsten Schritt zur Lösung des Problems der Axiomatisierung der Mengenlehre bildet.

---

[1] J. v. Neumann: Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Journ. f. r. u. a. Math., 154, 219—240, 1925.

Üb.-Aufg. 3. Definition der rationalen und der reellen Zahlen, im Anschluß an das Peanosche AS der natürlichen Zahlen (**32 b** oder **c**) nach der Methode von Russell [Einf.] 64ff. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 4. AS der reellen Zahlen nach Hilbert.[1] Drei Grundbegriffe: Addition und Multiplikation als dreistellige Relationen; „**Ad** (x, y, z)“: $x = y + z$; „**Mu** (x, y, z)“: $x = y \, . \, z$; **Gr**: größer als. [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 5. AS der Größentheorie.

a) „relativistisch“. Russell [Pr.] 162; Couturat [Pr.] 106. [Schw. I.]

b) „absolutistisch“. Russell [Pr.] 164; Couturat [Pr.] 108. [Schw. I.]

Üb.-Aufg. 6. AS der extensiven Größen. Couturat [Pr.] 113f. (im Anschluß an Burali-Forti). [Schw. III.]

B. Geometrie

Üb.-Aufg. 7. Definition der weiteren Begriffe der Topologie (Punktmengenlehre) auf Grund des Begriffs der Umgebung, im Anschluß an **33**, nach Hausdorff [Grundz.] 221ff. [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 8. System der Topologie auf Grund des Begriffs der konvergenten Punktfolge. Nach Hausdorff [Grundz.] 210, 233ff. Einziger Grundbegriff: **Li**. „x **Li** R“: x ist Limes der konvergenten Punktfolge R; diese Folgen sind also C‘ **Li**. Jede Folge R ist eine einmehrdeutige Zuordnung zwischen Punkten und den natürlichen Zahlen. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 9. System der Metrik (in der Punktmengenlehre) auf Grund des Begriffs der Entfernung. Nach Hausdorff [Grundz.] 211f., 290ff. Einziger Grundbegriff: **Ent**. „**Ent** (n, x, y)“: n ist die Entfernung zwischen x und y. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 10. Definition der Begriffe der kombinatorischen Topologie.[2] Einziger Grundbegriff: die (reflexive, sym-

---

[1] Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 1922[5]; Anhang VI: Über den Zahlbegriff (abgedr. aus: Jahresb. Math. Ver., 8, 1900).

[2] Am einfachsten im Anschluß an L. Vietoris: Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume ...., Math. Ann., **97**, 454ff., 1927. Vgl. ferner: O. Veblen, Analysis Situs, Cambridge Colloquium, 1916; H. Weyl, Análisis Situs Combinatorio, Sonderdruck aus: Revista Matemática Hispano-Americana, Toledo 1923.

metrische) Relation V, die „Verbundenheit“ von Punkten. α ist ein Simplex (si): $\alpha \uparrow \alpha \subset \mathsf{V}$; die n-dimensionalen Simplices: $\mathsf{si} \cap n$; α ist eine Seite von β: $\alpha, \beta \in \mathsf{si} \,.\, \alpha \subset \beta$. Die Komplexe: $\mathsf{Cl}\text{‘}\mathsf{si} \cap \mathsf{cls\ induct}$. Weiter Definition von: Rand eines Simplex, Rand eines Komplexes, Zykel, Zusammenhangszahl, usw. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 11. AS der projektiven Geometrie; Fortsetzung von **35**. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 12. AS der projektiven Geometrie (Abart: ohne die unendlich fernen Punkte, also mit offenen Geraden; Russell „deskriptive Geometrie“), auf Grund der Zwischen-Relation. Im Anschluß an Veblen,[1] nach Couturat [Pr.] 178ff. Einziger Grundbegriff: „Z (x, y, z)“: y liegt zwischen x und z. Mit mehrstelligen Relationen: Gerade, Kollinearität, Strecke (dreistellig); Dreieckslinie, Ebene, Komplanarität, Dreiecksfläche (vierstellig); Tetraederfläche, Raum (fünfstellig). [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 13. AS der projektiven Geometrie (dieselbe Abart: ohne unendlich ferne Punkte). Russell [Pr.] 395ff., im Anschluß an Vailati[2]; s. auch Couturat [Pr.] 186. Einziger Grundbegriff: k, die Klasse der Reihenrelationen, die die Punkte auf je einer Geraden ordnen. Die Punkte: $\mathsf{s}\text{‘}\mathsf{C}\text{“}\mathsf{k}$. [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 14. AS der projektiven Geometrie (im eigentlichen Sinne, mit geschlossenen Geraden), durch Erweiterung des Systems von Üb.-Aufg. 12. Es sind zunächst die Strahlenbündel zu definieren als Klassen solcher Geraden, die entweder durch éinen Punkt gehen oder untereinander parallel sind. Diese Strahlenbündel bilden dann die Elemente einer vollständigen projektiven Geometrie. Die Methode ist ausführlich erläutert in: Russell [Pr.] 400ff. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 15. Ebenso Erweiterung des Systems von Üb.-Aufg. 13. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 16. AS der metrischen Geometrie auf Grund des Begriffs der Bewegung. Im Anschluß an Pieri[3]; auch dar-

---

[1] Veblen: A system of axioms for geometry. Trans. Am. Math. Soc., 5, 343 bis 384, 1904.

[2] Vailati: Sui principii fondamentali della geometria della retta. Riv. d. Mat., 2, 71 bis 75, 1892.

[3] Pieri M.: Della geometria elementare come sistema ipotetico

gestellt bei: Couturat [Pr.] 204ff. Einziger Grundbegriff: **bew**, die Klasse der Bewegungen; jede Bewegung ist eine eineindeutige Relation zwischen Punkten. Die Punkte: **s'C"bew**. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 17. AS der metrischen Geometrie auf Grund des Begriffs der Teilkugel. Nach E. V. Huntington.[1] Einziger Grundbegriff: **Tl**, die (transitive, irreflexive) Relation zwischen zwei Kugeln derart, daß die erste ganz in der zweiten liegt. [Schw. III.]

Drei verschiedene Arten:

a) Die Kugeln als Punktklassen. Die Kugeln: **ku** $=_{Df}$ **C'Tl**; die Punkte: **s'ku**. y liegt „zwischen" x und z, wenn y zu jeder Kugel gehört, zu der x und z gehören. Damit ist der Grundbegriff des Systems von Üb.-Aufg. 12 erreicht, also sind die projektiven Begriffe wie dort ableitbar und die entsprechenden Axiome ausdrückbar. Weiter Definition folgender Begriffe: Sehne, Oberfläche, Mittelpunkt, Durchmesser einer Kugel; Kongruenz konfinaler Strecken, paralleler Strecken, allgemein. Damit sind die metrischen Begriffe gewonnen.

b) Die Kugeln als Elemente; mit Nullkugeln. Diese sind die Punkte (**D'Tl — Q'Tl**). Das Weitere wie in (a). (Dies ist die Systemform von Huntington.)

c) Die Kugeln als Elemente; ohne Nullkugeln. Die Punkte als gewisse unendliche Folgen ineinanderliegender Kugeln. Das weitere wie in (a).

Üb.-Aufg. 18. AS der metrischen Geometrie auf Grund des Begriffs des Vektors. Couturat [Pr.] 194ff., nach Peano[2]; vgl. Russell [Pr.] 432ff. Zwei Grundbegriffe: 1. die Klasse **ve** der Vektoren; jeder Vektor ist eine eineindeutige Relation zwischen Punkten; die Punkte: **s'C"ve**. 2. Das innere Produkt zweier Vektoren **Pr** (n, P, Q), eine dreistellige Relation zwischen einer reellen Zahl und zwei Vektoren. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 19. AS der metrischen Geometrie nach

deduttivo: Monografia del punto e del moto. Mem. Acc. Torino, 1899. — Derselbe: Sur la géometrie envisagée comme un système purement logique. Bibl. Congrès Int. Philos. Paris 1900, III, 367 bis 404.

[1] Huntington E. V.: A set of postulates for abstract geometry. Math. Ann., 73, 522 bis 559, 1913.

[2] Peano G: Analisi della teoria dei vettori. Atti Acc. Torino, 1898.

Hilbert.[1] 7 Grundbegriffe (!): die 3 Klassen der Punkte, der Geraden, der Ebenen; die 4 Relationen der Inzidenz, des Zwischen, der Streckenkongruenz, der Winkelkongruenz. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 20. AS des zweidimensionalen, Cliffordschen Raumes. Nach Russell [Pr.] 434ff.; vgl. Killing.[2] Gemeint ist der der Cliffordschen Fläche analoge Raum, der überall die Krümmung Null und doch ein endliches Volumen hat. Zwei Grundbegriffe: die Klasse der Richtungen (**dir**) und die Relation „kleiner“ zwischen Abständen (**Kl**). Eine Richtung ist eine symmetrische, irreflexive Relation zwischen Punkten; die Punkte: s‘C“**dir**. Ist R eine Richtung, so ist $\overleftarrow{R}`x \cup [x]$ eine Gerade durch x. Die Abstände: C‘**Kl**. Jeder Abstand ist eine symmetrische Relation zwischen Punkten. [Schw. III.]

C. Physik

Üb.-Aufg. 21. Raum-Zeit-Topologie. Durchführung des Systems von **36 b** (Grundbegriff: **W**) in Analogie zu **36 a**. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 22. System mit dem Grundbegriff **wlin**, gemäß den Andeutungen in **36 b**. [Schw. IV.]

Üb.-Aufg. 23. Ereignistheorie. Whiteheads Methode der „Ausdehnungsabstraktion“.[3] Einziger Grundbegriff: die Relation **K** (Teilereignis); die Ereignisse: C‘**K**. Beim Aufbau unterscheide man die „abstraktiven Reihen“ (Relationen) von den „abstraktiven Klassen“ (ihren Feldern). Die abstraktiven Reihen stellen die Punktereignisse dar; durch sie können, nach Whitehead, alle räumlichen und zeitlichen Begriffe ausgedrückt werden. (Für die metrischen Begriffe zweiter Grundbegriff: „Kogredienz“). [Schw. IV.]

D. Verwandtschaftslehre

Üb.-Aufg. 24. Verschiedene ASe des Verwandtschaftssystems der Menschen:

---

[1] Hilbert D.: Grundlagen der Geometrie. (1899) 1922[5].

[2] Killing W.: Einführung in die Grundlagen der Geometrie. I, 1893, S. 271ff.

[3] Whitehead A. N.: The concept of nature, 1920, S. 74ff.; und (ausführlicher): An enquiry concerning the principles of natural knowledge, 1919, S. 101ff.

Grundbegriffe: a) Sohn, Tochter, Ehemann. [Schw. II.]
b) Kind, männlich, Ehegatte (symmetrisch). [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 25. Vereinfachte Systeme mit nur zwei oder éinem Grundbegriff. Bei diesen Vereinfachungen bleiben unberücksichtigt:

I. der Unterschied zwischen der Zeugungsrelation und der juristischen Ehe,
II. das Geschlecht bei Kinderlosen,
III. das Geschlecht bei Unverheirateten,
IV. die Ehe zwischen Kinderlosen.

(I und IV können so interpretiert werden, daß hierbei „Ehe" nicht im juristischen Sinne, sondern im biologischen Sinne der Kinderzeugung verstanden wird; dann fällt III mit II zusammen und es ergibt sich II als einziger Mangel der Systeme a-e).

Systeme mit verschiedener Wahl der Grundbegriffe:

a) Kind, Ehemann, (unberücksichtigt: entweder I, II oder III, IV) [Schw. II.]
b) Kind, männlich, (unberücksichtigt: I) [Schw. II.]
c) Mutter, Vater, (unberücksichtigt: I, II) [Schw. II.]
d) Sohn, Tochter, (unberücksichtigt: I) [Schw. II.]
e) einziger Grundbegriff: die dreistellige Relation **Zg** (Zeugung) (wie in **38**), (unberücksichtigt: I, II). [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 26. Eine genauere Analyse der Verwandtschaftsbegriffe: Mit Rücksicht auf die zeitbedingten juristischen Begriffe (Eheauflösung durch Scheidung oder Tod) werden die Personen als Zeitreihen ihrer Zustände genommen (nach der Methode **43 a**). Also außer den verwandtschaftlichen Grundbegriffen (verschiedene Auswahl möglich, nach **38** oder Üb.-Aufg. 24, 25) neuer Grundbegriff: **Zt**; „x **Zt** y": x und y sind zwei Zustände derselben Person, x ist zeitlich vor y. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 27. Genauere Analyse der Grundrelation **Zg** (in **38** oder Üb.-Aufg. 25 e) mit Hilfe der Relation **Zt** (s. Üb.-Aufg. 26) und **Tl**; „x **Tl** y": der (Momentan-)Körper x ist ein Teil des Körpers y. Wesentliche Zeitpunkte: Zeugungsakt, Befruchtung, Geburt; das Spermatozoon ist bis zur Zeugung Teil des Vaters, nach der Befruchtung Teil des befruchteten Eies; das Ei ist Teil der Mutter, nach der Befruchtung außerdem Teil des befruchteten Eies; das befruchtete Ei (= das Kind) ist Teil der Mutter von der Befruchtung bis zur Geburt, von da ab „Person"; zwischen den

Personen gelten die Verwandtschaftsbeziehungen. (Nach der Methode von **43 c** kann noch **Tl** eliminiert, d. h. durch **C** ersetzt werden.) [Schw. III.]

E. Konstitutionstheorie

Üb.-Aufg. 28. Konstitution der Sehwelt (nach Carnap [Aufbau] § 125ff.). [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 29. Konstitution der Wahrnehmungswelt (nach [Aufbau] § 133ff.). [Schw. IV.]

F. Sprachanalyse

I. Logische Semasiologie der deutschen Sprache.

Üb.-Aufg. 30. „oder“. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 31. „wenn“. [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 32. Die Apposition. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 33. Der Relativsatz. [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 34. Das Possessiv-Pronomen. (Vgl. **41**, 4. Beispiel: „dein Bruder“, „meine Bücher“; Unterschied!). [Schw. III.]

II. Das logische Skelett folgender Sätze werde gebildet (vgl. **41** bis **43**).

A. Allgemeine Beispiele (vgl. **41**).

Üb.-Aufg. 35. „Wer nicht für mich ist, der ist gegen mich.“ [Schw. I.]

Üb.-Aufg. 36. „Selbstmörder werden nicht kirchlich bestattet.“ [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 37. „Ich kenne mehr von deinen Verwandten als du von meinen.“ [Schw. II.]

B. Maßzahlen (vgl. **42**).

Üb.-Aufg. 38. „Dieser Stab ist doppelt so lang wie jener“. [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 39. „Je höher der Berg, um so weiter die Aussicht.“ [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 40. „Der Preis in Mark verhält sich zum Preis in Schilling wie 3 zu 5“. [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 41. „Wenn die Werte zweier Geldeinheiten sich verhalten wie 5 zu 3, so verhält sich der Preis in der ersten zu dem in der zweiten wie 3 zu 5“. [Schw. III.]

C. Zustände und Vorgänge; Ort und Zeit (vgl. **43**).

(Hieher gehören auch Üb.-Aufg. 26, 27.)

Üb.-Aufg. 42. „Wer mich schlägt, den schlage ich wieder". (Zeitverhältnis!) [Schw. II.]

Üb.-Aufg. 43. „Wer jeden, der ihn schlägt, wieder schlägt, ist rachsüchtig". [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 44. „Wenn jeder den Schlagenden wieder schlägt, nimmt der Streit (das Schlagen) kein Ende". [Schw. III.]

Üb.-Aufg. 45. „Für jede Menge eines idealen Gases gilt: $p \cdot v = R \cdot T$ (Druck · Volumen = Konstante · absolute Temperatur)". [Schw. IV.]

45. Übersicht über die wichtigsten logistischen Zeichen

	Aussagen	Klassen	Relationen
Negat	$\sim p$	$-\alpha$	$\dot{-} R$
Disjunktion, Vereinigung	$p \vee q$	$\alpha \cup \beta$	$R \dot\cup S$
Konjunktion, Durchschnitt	$p . q$	$\alpha \cap \beta$	$R \dot\cap S$
Implikation, Subsumtion	$p \supset q$	$\alpha \subset \beta$	$R \dot\subset S$
Äquivalenz, Identität	$p \equiv q$	$\alpha = \beta$	$R = S$

Behauptungszeichen: $\vdash p$. Definitionszeichen: $=_{\mathrm{Df}}$

Über die Punktzeichen vgl. 4 c.

Aussagefunktionen. Allaussage $(x) . \varphi x$; Existenzaussage $(\exists x) . \varphi x$; generelle Implikation $\varphi x . \supset_x . \psi x$. „Gebundene Variable".

Klassen. $\hat{x}(\varphi x)$. Zugehörigkeit: $x \in \alpha$. α ist nicht leer: $\exists ! \alpha$. Die leere Klasse Λ, die Allklasse V. Einerklasse $[x]$ oder $\iota' x$. Die Teilklassen von α: $\mathrm{Cl}'\alpha$. Gesamtvereinigung: $\mathrm{s}'\varkappa$; Gesamtdurchschnitt: $\mathrm{p}'\varkappa$. Fremd Fr, gleichmächtig Sm; Kardinalzahl $\mathrm{Nc}'\alpha$.

Relationen. $\hat{x}\hat{y}(\varphi x y)$. $x R y$. Analog den Klassenzeichen: $\dot\exists ! R$, $\dot\Lambda$, $\dot V$, $x \downarrow y$, $\mathrm{Rl}'R$, $\dot{\mathrm{s}}'\varkappa$, $\dot{\mathrm{p}}'\varkappa$. Konverse $\breve{R}$; Vorbereich $\mathrm{D}'R$, Nachbereich $\mathrm{Q}'R$, Feld $\mathrm{C}'R$, Identität $=$ oder I, Verschiedenheit $\neq$ oder J. Kennzeichnungen: $R'y$ (das R von y), $\overrightarrow{R}'y$ (die R von y), $\overleftarrow{R}'x$ (die $\breve{R}$ von x), $R''\alpha$ (die R von den α). Beschränkungen: $\alpha \upharpoonleft R$, $R \upharpoonright \beta$, $R \restriction \alpha$. Verkettung $R | S$; Potenzen R^2, R^3, ..., R^0 (Identität); Ketten R_*, R_{po}. Anfangsglied $\mathrm{B}'R$. Einmehrdeutig, mehreindeutig, eineindeutig: $1 \rightarrow \mathrm{Cls}$, $\mathrm{Cls} \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 1$. Isomorphie Smor; Relationszahl (Struktur) $\mathrm{Nr}'R$. Reflexiv (refl), irreflexiv (irr); symmetrisch (sym), asymmetrisch (as); transitiv (trans), intransitiv (intr); zusammenhängend (connex); Reihe (ser).

Die Verwendung der Buchstaben.

1. Variable.

Für Aussagen:	p, q, r	(2 b)
für Aussagefunktionen:	φ, χ, ψ	(2 c)
für Individuen:	$x, y, z;\ t, u, v, w$	(9 b)
für Klassen:	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta;\ \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \xi$	(8 b)
für Relationen:	$R, S, T;\ P, Q;\ U, W, X, Y, Z$	(11 b)

2. Konstante. Individuen: a, b, c, d.

Klassen: mit kleinem Anfangsbuchstaben (z. B. nc, trans, ser). Relationen: mit großem Anfangsbuchstaben (z. B. Sm, C, D, Cl).

Die nicht-logischen Klassen und Relationen ebenso, aber in halbfetter Schrift (z. B. im I. Teil (s. **12** e): **ml**, **prim**; **Freund**, **Quadr**; im II. Teil: **ger**, **Str**).

46. Literaturverzeichnis

Die Bücher sind in den Zitaten mit den in eckiger Klammer stehenden Abkürzungen bezeichnet; Ausnahme: PM = Princ. Math., s. Whitehead.

Behmann H.: [Math.], Mathematik und Logik. Leipzig u. Berlin 1927.

Carnap R.: [Aufbau], Der logische Aufbau der Welt. Versuch einer Konstitutionstheorie der Begriffe. Berlin 1928.

Couturat L.: [Pr.], Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. (1906). Dtsch. v. C. Siegel. Leipzig 1908.

Fraenkel A.: [Grundl.], Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. Leipzig u. Berlin 1927.

— [Einl.], Einleitung in die Mengenlehre. Berlin (1919) 3. A. 1928.

Frege G.: [Begriffsschrift], Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879.

— [Grundl.], Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884.

— [Grundg.], Grundgesetze der Arithmetik. Jena, I 1893, II 1903.

Hausdorff F.: [Grundz.], Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914 (2. A., gekürzt, „Mengenlehre", 1927).

Hilbert D. u. Ackermann W.: [Logik], Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin 1928. (Für den Text nicht mehr verwertet).

Lewis C. I.: [Survey], Survey of the Symbolic Logic. Berkeley 1918.

Peano G.: [Not.], Notations de Logique Mathématique. Torino 1894.

— [Form.], Formulaire de Mathématiques. Torino (1895) 1908.

Ramsey F. P.: [Found.], The Foundations of Mathematics. Proc. London Math. Soc., Ser. 2, **25**, 338—384, 1926.

Russell B.: [Pr.], The Principles of Mathematics. I. (einz. Bd.) Cambridge 1903.
— [Einf.], Einführung in die mathematische Philosophie. (1919). Dtsch. v. Gumbel u. Gordon. München 1923.
— PM, Principia Mathematica, s. Whitehead.
Schröder E.: [Vorles.], Vorlesungen über die Algebra der Logik. I—III, Leipzig 1890—1905.
Weyl H.: [Handb.], Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. In: Handb. d. Philos., herausg. v. Bäumler u. Schröter, Abt. II A. München u. Berlin 1926. (Auch gesondert erschienen.)
Whitehead A. N. u. Russell B.: PM, Principia Mathematica. Cambridge, 1. A.: I 1910, II 1912, III 1913; 2. A.: I 1925 (Text unverändert; neue Einleitung und Anhänge hinzugefügt), II, III 1927 (unverändert); (IV über Geometrie noch nicht erschienen).
Wittgenstein L.: [Abh.], Logisch-philosophische Abhandlung. Mit Vorwort von Russell. Ann. d. Kult.- u. Nat.-Phil., **14**, 185—262, 1921. (Auch in deutsch-englischer Parallelausgabe als Buch erschienen: Tractatus Logico-Philosophicus. London 1922.)

47. Literaturhinweise

Die Zahlen verweisen auf die Paragraphen des Buches.

Eine Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Logistik mit sehr reichhaltigem Literaturverzeichnis (bis 1917) gibt Lewis [Survey].

1. Ältere Systeme, die nur noch historisches Interesse haben: De Morgan, Formal Logic, London 1847. Boole, An Investigation of the Laws of Thought, London 1854. Jevons, Pure Logic, London 1864. Peirce, Aufsätze in verschiedenen Zeitschriften; Verbesserung des Booleschen Systems.

2. Ältere Schriften, die zwar durch die neuere Logistik überholt sind, die aber doch noch für die Gegenwart wertvolle Überlegungen enthalten: Frege [Begriffsschrift], [Grundl.], [Grundg.]; Peano [Not.], [Form.]; Schröder [Vorles.], Abriß der Algebra der Logik, herausgeg. von E. Müller, Leipzig 1909, 10; Whitehead, A Treatise on Universal Algebra, Cambridge 1898; Couturat [Pr.], L'Algèbre de la Logique, Paris 1905.

3. Die moderne Logistik.

A. Allgemeines. Die vorliegende Darstellung schließt sich an das Hauptwerk der Logistik an: Whitehead und Russell, PM.

[Abweichungen. Die verzweigte Typentheorie und das Reduzibilitätsaxiom werden fallen gelassen (vgl. **9d**), und damit auch die Sonderstellung der elementaren Aussagen und der prädikativen Aussagefunktionen. Die Schlußregel der Substitution (G 4·61, 62) wird eingefügt. Alle Relationen werden mit großem Anfangsbuchstaben geschrieben (Ausnahmen: $\mathfrak{s}$, $\dot{\mathfrak{s}}$, s, $\dot{s}$), alle Klassen

mit kleinem. $=_{\mathrm{Df}}$ anstatt $= \ldots \mathrm{Df}$. Neue Termini (die von anderen Autoren schon verwendeten sind hier nicht aufgeführt, vgl. Sachregister 49): Abstraktionsklasse, Ähnlichkeit, Ähnlichkeitskreis, aliotransitiv, Anfangsglied, Bild, Diverse, Endglied, Explizitbegriff, Gebrauchsdefinition, Gegenstandsfunktion, generelle (Implikation), Gleichheit, Grundstufe, Grundtypus, Kennzeichnung, kennzeichnende Funktion, Nachfolger, offen, Operation, Quasianalyse, Schrittzahl, strukturelle Eigenschaft, Totalgleichheit, totalreflexiv, Vorgänger, Zwischenklasse. Neue Zeichen für logische Konstanten: Aeq, aeq, aeqt, as, Begr, D_1, dedek, Dz (usw.), Fr, gru, hausd, Hf, intr, irr, $M(x, y, z)$, ${}^1M$, ${}^1M_u$, M^{132}, R^0, refl, reflex, sim, Sim, struct, sym, t, Umgr, Umr, $[x]$, zykl, Zykl.]

Ausführliche Erörterung der Begriffe der Logistik, aber ohne Symbolik, gibt Russell [Pr.]. Eine kürzere Einführung, ebenfalls ohne Symbolik: Russell [Einf.]. Verwandte Systeme, aber mit anderer Symbolik: Behmann [Math.], Hilbert [Logik].

B. Einzelprobleme: Literaturhinweise sind an den einzelnen Stellen gegeben: Ableitung der Mathematik 1; Identität 7a; Paradoxien und Typentheorie 9c; verzweigte Typentheorie, das Reduzibilitätsaxiom und seine Ausschaltung 9d; Extensionalitätsthese 9e; Abstraktionsprinzip 20b; Kardinalzahl 21b; Struktur 22d; Auswahlaxiom 24b; Axiomatik 30b.

48. Namenregister

Die Zahlen bezeichnen die Paragraphen des Buches

49. Sachregister mit vergleichender Terminologie

Die Zahlen verweisen auf die Paragraphen des Buches.

Bei den wichtigsten Ausdrücken ist die Terminologie einiger Werke mit folgenden Abkürzungen angegeben:

Be	Behmann [Math.]
Du	Clauberg u. Dubislav, Systematisches Wörterbuch der Philosophie. Leipzig 1923.
Fr	Frege [Begriffsschrift], [Grundl.], [Grundg.]
Hi	Hilbert [Logik]
Ru	Russell, PM
RuG	Russell-Gumbel [Einf.]
Sch	Schröder [Vorles.]
We	Weyl [Handb.]

50. Register der logischen Konstanten

Die Zahlen bezeichnen die Paragraphen des Buches.

Die nichtlogischen Konstanten für die Beispiele in Teil I: 12e; die in Teil II werden jeweils nur in dem Paragraphen verwendet, in dem sie eingeführt werden.

Die Variabeln: 45.

Manzsche Buchdruckerei, Wien IX. 5208